Vol Zéro-G

Bac S 2016 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 1 h**

1.1 Rappeler la condition que doit vérifier l'énergie mécanique d'un système lorsqu'il est en chute libre.

Un système en chute libre n'est soumis qu'à son poids, qui est une force conservative.

Son énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$ se conserve : elle garde la même valeur à chaque instant.

COMPRENDRE
L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur varient toutes les deux ; c'est leur somme qui reste constante. Ce que l'avion perd en vitesse, il le gagne en altitude.

1.2 Les caractéristiques de la trajectoire parabolique suivie par l'avion sont-elles compatibles avec une chute libre ? Argumenter avec un calcul d'énergie.

Données utiles $m = 1{,}5 \times 10^5$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; début de la parabole : $z_1 = 7\,600$ m, $v_1 = 527\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; sommet : $z_2 = 8\,200$ m, $v_2 = 355\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

On compare l'énergie mécanique $E_m = \dfrac{1}{2} m v^2 + m g z$ au début de la parabole (1) et à son sommet (2), l'origine des énergies potentielles étant prise au niveau du sol.

Vitesses en unité SI : $v_1 = \dfrac{527}{3{,}6} = 146\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_2 = \dfrac{355}{3{,}6} = 98{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Au début de la parabole :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 10^5 \times \left(\frac{527}{3{,}6}\right)^2 = 1{,}61 \times 10^9\ \text{J}$$

$$E_{pp1} = 1{,}5 \times 10^5 \times 9{,}81 \times 7\,600 = 1{,}118 \times 10^{10}\ \text{J}$$

d'où $E_{m1} = E_{c1} + E_{pp1} = 1{,}279 \times 10^{10}$ J.

Au sommet :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 10^5 \times \left(\frac{355}{3{,}6}\right)^2 = 7{,}29 \times 10^8\ \text{J}$$

$$E_{pp2} = 1{,}5 \times 10^5 \times 9{,}81 \times 8\,200 = 1{,}207 \times 10^{10}\ \text{J}$$

d'où $E_{m2} = E_{c2} + E_{pp2} = 1{,}280 \times 10^{10}$ J.

Les deux valeurs diffèrent de moins de $0{,}1\ \%$: avec la précision des données, elles sont égales.

$E_{m1} = E_{m2} = 1{,}3 \times 10^{10}$ J : l'énergie mécanique se conserve, les caractéristiques du vol sont compatibles avec une chute libre.

PIÈGE
Laisser les vitesses en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$: l'énergie cinétique serait multipliée par $3{,}6^2 \approx 13$ et la conservation n'apparaîtrait plus.

COMPRENDRE
La masse n'a que deux chiffres significatifs : le résultat s'écrit $1{,}3 \times 10^{10}$ J. Les chiffres supplémentaires gardés dans le calcul servent seulement à la comparaison.

COMPRENDRE
L'avion subit aussi la poussée des réacteurs et les actions de l'air. Le pilote règle la poussée pour qu'elles se compensent : tout se passe comme si le poids agissait seul.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{527}{3.6} \approx 146.3889$

$\frac{355}{3.6} \approx 98.61111$

$0.5 \times 1.5 \times 10^5 \times \left(\frac{527}{3.6}\right)^2 \approx 1.607228 \times 10^9$

$1.5 \times 10^5 \times 9.81 \times 7600 \approx 1.11834 \times 10^{10}$

$0.5 \times 1.5 \times 10^5 \times \left(\frac{355}{3.6}\right)^2 \approx 7.293113 \times 10^8$

$1.5 \times 10^5 \times 9.81 \times 8200 \approx 1.20663 \times 10^{10}$

$1.607228009 \times 10^9 + 1.11834 \times 10^{10} \approx 1.279063 \times 10^{10}$

$7.293113426 \times 10^8 + 1.20663 \times 10^{10} \approx 1.279561 \times 10^{10}$

2.1 Montrer que l'intensité de la pesanteur à l'altitude h s'écrit $g_h = G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$.

Un objet de masse m situé à l'altitude h se trouve à la distance $R_T + h$ du centre de la Terre. La Terre exerce sur lui une force d'attraction gravitationnelle de valeur :

$$F = G\frac{m\,M_T}{(R_T+h)^2}$$

On assimile le poids de l'objet, de valeur $P = m\,g_h$, à cette force :

$$m\,g_h = G\frac{m\,M_T}{(R_T+h)^2}$$

En simplifiant par m :

$$\boxed{g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$$

PIÈGE

La distance qui intervient dans la loi de la gravitation se mesure depuis le centre de la Terre : c'est $R_T + h$, et non l'altitude h seule.

COMPRENDRE

La masse m de l'objet disparaît : l'intensité de la pesanteur ne dépend que de l'astre et de la position, pas de l'objet qui s'y trouve.

2.2 Justifier, à partir du résultat précédent, qu'il est légitime de considérer que l'intensité de la pesanteur est constante lors d'un vol Zéro-G.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}38 \times 10^6$ m ; altitude comprise entre 7 600 m et 8 200 m

Pendant la parabole, l'altitude varie entre $h_1 = 7\,600$ m et $h_2 = 8\,200$ m. On calcule g_h aux deux extrémités :

$$g_{h_1} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97 \times 10^{24}}{(6{,}38 \times 10^6 + 7\,600)^2} = 9{,}76\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_{h_2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97 \times 10^{24}}{(6{,}38 \times 10^6 + 8\,200)^2} = 9{,}76\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

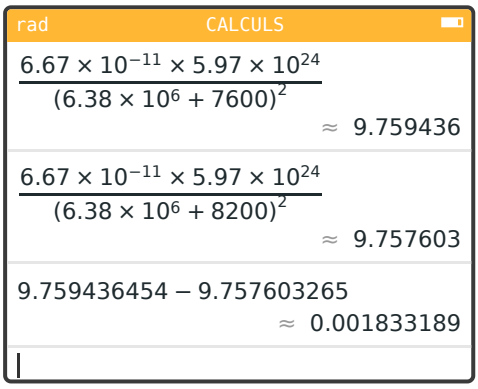
L'écart entre les deux valeurs, $0{,}002\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$, représente environ $0{,}02\ \%$ de g_h.

$g_{h_1} = g_{h_2} = 9{,}76\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ avec trois chiffres significatifs : l'intensité de la pesanteur peut être considérée comme constante pendant le vol.

PIÈGE
Oublier le carré au dénominateur, ou additionner R_T en mètres et une altitude convertie en kilomètres.

MÉTHODE
Argument sans calcul, également recevable : l'altitude ne varie que de 600 m, valeur négligeable devant $R_T + h \approx 6{,}39 \times 10^6$ m. Le dénominateur ne change donc presque pas.

À LA CALCULATRICE



3.1 Énoncer la deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$$

PIÈGE
Un énoncé complet précise le référentiel galiléen et le caractère vectoriel de la relation. La formule seule ne rapporte pas tous les points.

COMPRENDRE
En 2016, la loi s'énonçait avec la quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \dfrac{\text{d}\vec{p}}{\text{d}t}$. Cette notion n'est plus au programme de spécialité ; à masse constante, les deux écritures sont équivalentes.

3.2 Montrer que les équations horaires d'un système en chute libre sont $x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t$ et $y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t$.

Système {avion}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du sujet. En chute libre, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$. Comme $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas :

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

Puisque $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = C_1$ et $v_y = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ de coordonnées $(v_0 \cos\alpha\ ;\ v_0 \sin\alpha)$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

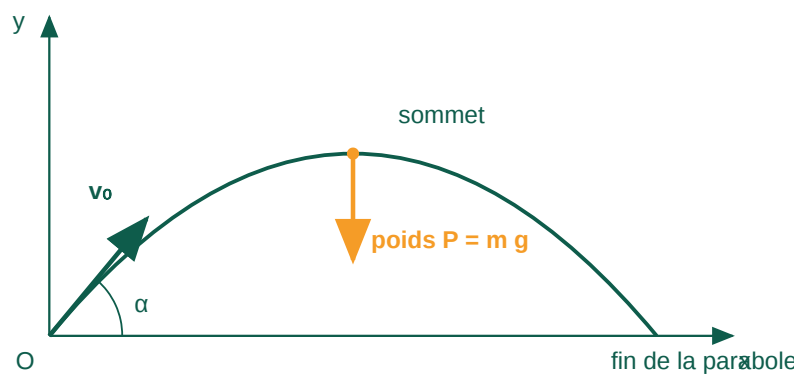
Puisque $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche à nouveau les primitives : $x = v_0 \cos(\alpha)\, t + C_3$ et $y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t + C_4$.

À $t = 0$, l'avion est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t}$$

PIÈGE
Écrire $a_y = +g$ alors que l'axe Oy est orienté vers le haut, ou inverser cosinus et sinus : l'angle α est mesuré par rapport à l'horizontale.

MÉTHODE
Toujours la même chaîne : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection, puis deux recherches de primitives. Chaque constante se détermine avec une condition initiale, sur la vitesse puis sur la position.



3.2 · Repère du sujet, vitesse initiale et poids de l'avion

3.3 En exploitant les équations horaires, calculer la durée d'apesanteur. Ce résultat est-il cohérent avec la donnée du document 2 ?

Données utiles $v_0 = 527\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $\alpha = 47^\circ$; $g = 9{,}8\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$; durée annoncée : 22 s

La phase d'apesanteur se termine lorsque l'avion revient à son altitude de départ, c'est-à-dire lorsque $y(t) = 0$ avec $t \neq 0$:

$$-\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t = 0 \iff t\left(-\frac{1}{2} g\, t + v_0 \sin\alpha\right) = 0$$

La solution $t = 0$ correspond au départ ; on retient l'autre :

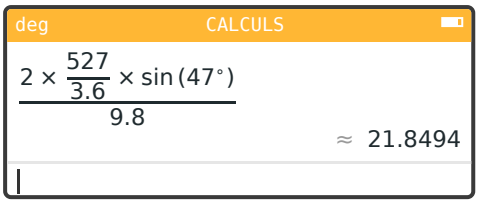
$$t = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \times \dfrac{527}{3{,}6} \times \sin(47^\circ)}{9{,}8} = 21{,}8\ \mathrm{s}$$

$t \approx 22$ s : le résultat est cohérent avec la durée d'apesanteur de 22 s indiquée dans le document 2.

PIÈGE
Calculatrice réglée en radians : $\sin(47)$ devient $0{,}12$ et la durée tombe à moins de 4 s. Vérifier le mode degrés et la conversion de v_0 en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

COMPRENDRE
Le modèle redonne aussi les autres lignes du document 2 : hauteur maximale $\dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \approx 585$ m (pour 600 m) et vitesse au sommet $v_0 \cos\alpha \approx 359\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (pour 355).

À LA CALCULATRICE



3.4 Quels paramètres faut-il modifier pour augmenter la durée d'apesanteur ? Cela semble-t-il possible ?

Données utiles $t = \dfrac{2\,v_0 \sin\alpha}{g}$ (3.3)

D'après l'expression $t = \dfrac{2\,v_0 \sin\alpha}{g}$, et comme g est imposé, deux paramètres peuvent allonger la durée :

- la vitesse v_0 au début de la parabole, qu'il faut augmenter ;
- l'angle α avec l'horizontale, qu'il faut augmenter pour le rapprocher de $90°$, car $\sin\alpha$ croît entre $0°$ et $90°$.

Ces deux modifications paraissent difficiles à réaliser. L'avion est un gros porteur de 150 tonnes : aller plus vite demanderait des réacteurs bien plus puissants, et se cabrer davantage soumettrait sa structure à des contraintes excessives et rendrait le pilotage délicat.

Il faudrait augmenter v_0 ou α ; pour un avion de cette taille, la marge de progression est très limitée.

COMPRENDRE

La masse de l'avion n'apparaît pas dans l'expression de la durée : alléger l'appareil ne changerait rien à la durée de la chute libre.