Les ondes gravitationnelles

Bac S 2017 Asie (ancien programme) · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h**

1.1 À quelle distance de la Terre, exprimée en année-lumière, se trouve la source des ondes gravitationnelles détectées le 14 septembre 2015 ?

Données utiles fusion des trous noirs il y a 1,3 milliard d'années ; célérité des ondes gravitationnelles : c, celle de la lumière dans le vide

Les ondes détectées en 2015 ont été émises lors de la fusion, il y a 1,3 milliard d'années. Elles ont donc voyagé pendant $1{,}3 \times 10^9$ ans à la célérité de la lumière.

Une année-lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année, donc :

$d = 1{,}3 \times 10^9$ années-lumière (1,3 milliard d'années-lumière)

COMPRENDRE
Aucun calcul en mètres n'est demandé : l'année-lumière est justement l'unité pour laquelle la distance se lit directement sur la durée du trajet d'un signal de célérité c.

1.2 Le détecteur de Livingston a reçu les ondes 7 ms avant celui de Hanford. a. Expliquer pourquoi les ondes ne peuvent pas provenir de la direction 2. b. Choisir, en justifiant, une direction possible parmi les deux autres.

Données utiles distance Livingston-Hanford : $D = 3000$ km ; retard mesuré : $\tau = 7$ ms ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1} ; échelle de la carte : segment de 1000 km

a. La direction 2 est celle de la droite Livingston-Hanford. Après Livingston, les ondes devraient encore parcourir $D = 3000$ km pour atteindre Hanford, d'où un retard :

$$\tau_2 = \frac{D}{c} = \frac{3000 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8} = 1{,}00 \times 10^{-2}\ \text{s} = 10\ \text{ms}$$

Ce retard est nettement supérieur aux 7 ms mesurées : la direction 2 est exclue.

b. Un retard de 7 ms correspond à un trajet supplémentaire jusqu'à Hanford :

$$d' = c\,\tau = 3{,}00 \times 10^8 \times 7 \times 10^{-3} = 2{,}1 \times 10^6\ \text{m} = 2{,}1 \times 10^3\ \text{km}$$

Sur la carte, ce trajet supplémentaire se mesure le long de la direction de propagation, entre Hanford et le front d'onde qui passe par Livingston (perpendiculaire à cette direction). Avec l'échelle :

- direction 1 : $d_1 \approx 2{,}2 \times 10^3$ km, soit un retard $\dfrac{d_1}{c} \approx 7$ ms ;
- direction 3 : $d_3 \approx 2{,}7 \times 10^3$ km, soit un retard $\dfrac{d_3}{c} \approx 9$ ms.

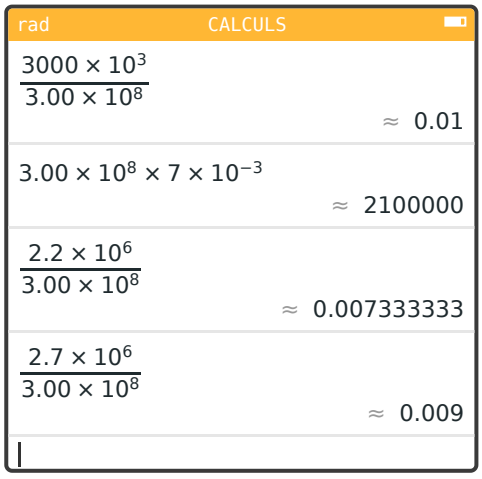
La direction 1 est une provenance possible : elle donne un retard d'environ 7 ms, conforme à la mesure.

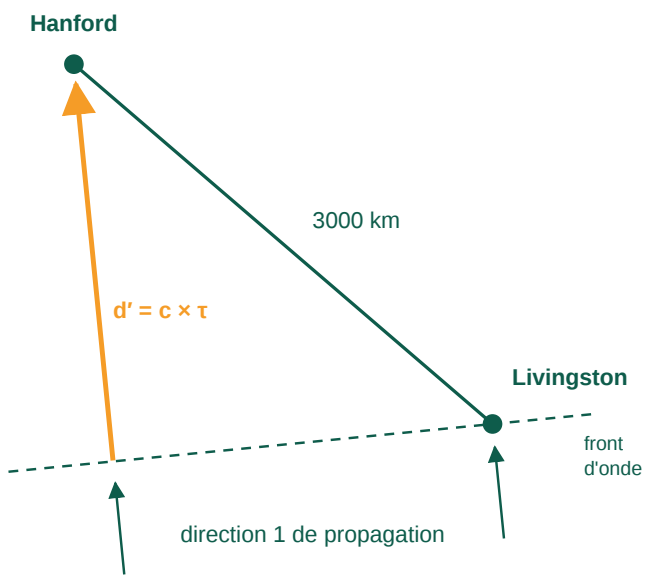
PIÈGE
Utiliser 3000 km pour les trois directions. Cette distance n'est le trajet supplémentaire que si l'onde se propage le long de la droite qui joint les deux détecteurs.

COMPRENDRE
Le retard est donné avec un seul chiffre significatif et la mesure sur la carte est peu précise : un écart de 0,1 cm sur la règle ne change pas la conclusion.

MÉTHODE
Tracer la perpendiculaire à la direction de propagation passant par le premier détecteur atteint : c'est un front d'onde. La distance de ce front au second détecteur, divisée par c, donne le retard.

À LA CALCULATRICE





1.2 · Direction 1 : trajet supplémentaire jusqu'à Hanford (carte du sujet simplifiée)

2.1 Schématiser le système des deux trous noirs, représenter sans souci d'échelle la force gravitationnelle exercée par l'un sur l'autre et donner l'expression de sa valeur en fonction de G, m et r.

Données utiles deux trous noirs de même masse m, diamétralement opposés sur une même orbite circulaire de rayon r

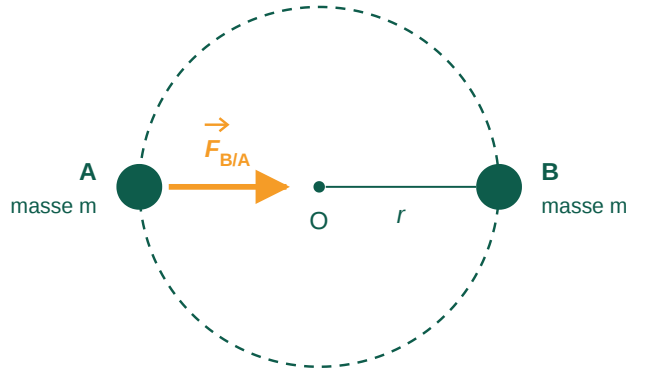
Les trous noirs A et B sont aux extrémités d'un diamètre de l'orbite de centre O : la distance qui les sépare est $AB = 2r$.

La force $\vec{F}_{B/A}$ exercée par B sur A est appliquée en A, portée par la droite (AB) et dirigée vers B, donc vers O (voir le schéma).

$$F_{B/A} = G\frac{m \times m}{(2r)^2}$$

$$\boxed{F_{B/A} = \frac{G\,m^2}{4\,r^2}}$$

PIÈGE
Écrire r^2 au dénominateur. La loi de la gravitation fait intervenir la distance entre les deux centres, ici le diamètre $2r$, et non le rayon de l'orbite.



2.1 · Les deux trous noirs sur leur orbite commune et la force exercée par B sur A

2.2 Montrer que la vitesse v des trous noirs peut s'écrire $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\,m}{r}}$.

Données utiles $F_{B/A} = \frac{G\,m^2}{4\,r^2}$ (2.1) ; référentiel galiléen, centre O de la trajectoire fixe

Système {trou noir A}, de masse m ; référentiel d'étude supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}_{B/A}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{B/A} = m\,\vec{a}$. Avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire dirigé de A vers O :

$$\vec{a} = \frac{G\,m}{4\,r^2}\,\vec{n}$$

L'accélération n'a pas de composante tangentielle : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, le mouvement circulaire est uniforme et $\vec{a} = \frac{v^2}{r}\,\vec{n}$.

En égalant les deux expressions : $\frac{v^2}{r} = \frac{G\,m}{4\,r^2}$, soit $v^2 = \frac{G\,m}{4\,r}$.

$v = \sqrt{\frac{G\,m}{4\,r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\,m}{r}}$: c'est la relation attendue.

PIÈGE
Le rayon de la trajectoire est r, mais la distance dans la force est $2r$. Écrire $\frac{v^2}{2r}$ ou garder $\frac{G\,m}{r^2}$ fait disparaître le facteur $\frac{1}{2}$.

MÉTHODE
Système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis expression de l'accélération d'un mouvement circulaire : la composante vers le centre donne la vitesse.

2.3 En déduire que le rayon de l'orbite est lié à la période de révolution T des trous noirs par $r^3 = \frac{G\,m}{16\,\pi^2}\,T^2$.

Données utiles $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\,m}{r}}$ (2.2)

Le mouvement est circulaire uniforme : pendant une période T, un trou noir parcourt le périmètre $2\pi r$ de l'orbite à la vitesse v.

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

On élève au carré et on utilise $v^2 = \frac{G\,m}{4\,r}$:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G\,m}{4\,r} \quad \text{donc} \quad 16\,\pi^2 r^3 = G\,m\,T^2$$

$r^3 = \frac{G\,m}{16\,\pi^2}\,T^2$: c'est la relation attendue.

COMPRENDRE
Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant : on retrouve la forme de la troisième loi de Kepler, avec un coefficient différent de celui d'un satellite autour d'un astre fixe.

2.4 Comment évolue la fréquence des ondes gravitationnelles émises par les deux trous noirs quand ils se rapprochent pour fusionner ?

Données utiles période des ondes : $T_{OG} = \frac{T}{2}$; $r^3 = \frac{G\,m}{16\,\pi^2}\,T^2$ (2.3)

D'après 2.3 : $T = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,m}}$. Quand les trous noirs se rapprochent, r diminue, donc la période de révolution T diminue.

La fréquence des ondes est $f_{OG} = \frac{1}{T_{OG}} = \frac{2}{T}$, soit :

$$f_{OG} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G\,m}{r^3}}$$

Quand les trous noirs se rapprochent, r diminue et la fréquence des ondes gravitationnelles augmente.

COMPRENDRE
La fréquence des ondes est le double de la fréquence de révolution : après un demi-tour, les deux trous noirs de même masse ont échangé leurs places et le système a retrouvé son aspect.

2.5 Pour deux trous noirs de masse environ égale à 30 fois celle du Soleil, montrer que la mécanique newtonienne donne une bonne approximation de leur vitesse, estimée par la relativité générale au quart de celle de la lumière.

Données utiles cadence : 75 tours par seconde ; $m = 30\,M_S$ avec $M_S = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Fréquence de révolution : $f = 75$ Hz, donc $T = \dfrac{1}{f}$.

Rayon de l'orbite (2.3) : $r = \left(\dfrac{G \times 30\,M_S}{16\,\pi^2 f^2}\right)^{1/3}$

$$r = \left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 30 \times 2{,}00 \times 10^{30}}{16\,\pi^2 \times 75^2}\right)^{1/3} = 1{,}7 \times 10^5\ \text{m}$$

Vitesse d'un trou noir, avec la valeur non arrondie de r :

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = 2\pi \times 1{,}65 \times 10^5 \times 75 = 7{,}8 \times 10^7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Comparaison : $\dfrac{v}{c} = \dfrac{7{,}8 \times 10^7}{3{,}00 \times 10^8} = 0{,}26$, alors que la relativité générale prévoit $\dfrac{c}{4}$, soit un rapport de $0{,}25$.

$v = 7{,}8 \times 10^7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \approx \dfrac{c}{4} = 7{,}5 \times 10^7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: la mécanique newtonienne donne une bonne approximation (écart de 4 %).

PIÈGE

Prendre 75 Hz pour la fréquence des ondes, ou $T = 75$ s. La cadence de 75 tours par seconde est la fréquence de révolution : $T = \dfrac{1}{75}$ s.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme la cadence « 75 tours par seconde ». Avec r arrondi à $1{,}7 \times 10^5$ m dans $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{G\,m}{r}}$, on obtient $7{,}7 \times 10^7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: garder la valeur en mémoire.

À LA CALCULATRICE

