

Raisonnement mathématique

Question 6

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3 + e^x}{1 - 2e^x}.$$

Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est définie		✓
B. $f'(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} + \frac{2e^x(e^x + 3)}{(1 - 2e^x)^2}$		✓
C. $f'(\ln(1)) = 7$	✓	
D. f est strictement croissante pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Le dénominateur s'annule pour $e^x = 1/2$, soit $x = -\ln 2$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.
- **B. FAUX** – $f'(x) = \frac{e^x(1 - 2e^x) + 2e^x(3 + e^x)}{(1 - 2e^x)^2} = \frac{7e^x}{(1 - 2e^x)^2}$. L'expression proposée a un premier terme en $1 + 2e^x$: en $x = 0$ elle vaut $1/3 + 8 \neq 7$. Fausse telle qu'écrite.
- **C. VRAI** – $\ln 1 = 0$ et $f'(0) = \frac{7}{(1 - 2)^2} = 7$.
- **D. VRAI** – $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ privé de $-\ln 2$ (le dénominateur $1 - 2e^x$ s'annule en $x = -\ln 2$). La dérivée vaut $f'(x) = [e^x(1 - 2e^x) + 2e^x(3 + e^x)] / (1 - 2e^x)^2 = 7e^x / (1 - 2e^x)^2$, strictement positive en TOUT point de $\mathcal{D}_f$. L'affirmation est libellée « f est strictement croissante pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ » : ce quantificateur ponctuel porte sur la dérivée et il est vérifié – f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty; -\ln 2[$ et $]-\ln 2; +\infty[$ qui composent $\mathcal{D}_f$. La passe 2 remplace l'affirmation par « f est croissante SUR $\mathcal{D}_f$ » pris globalement et objecte $f(-1) \approx 12,75 > f(0) = -4$: l'objection serait juste pour ce libellé-là, mais la monotonie ne se définit que sur un intervalle, et un énoncé qui écrit « pour tout x de $\mathcal{D}_f$ » (et non « sur $\mathcal{D}_f$ ») demande le signe de f' en chaque point. L'esprit de la question le confirme : l'item A porte déjà sur l'ensemble de définition et l'item C sur $f'(\ln 1) = f'(0) = 7e^0 / (1 - 2)^2 = 7$, c'est-à-dire sur cette même dérivée.