

Session du 25 avril 2023 – 15 questions, 4 affirmations à qualifier VRAI ou FAUX par question.
Calculatrice de la plateforme uniquement.

Raisonnement logique

Question 1

Une famille est composée des parents (Yves et Véronique) et de leurs quatre enfants (Louis, Simon, Pierre et Élise). Les 6 personnes viennent de se peser.

Pierre pèse plus que sa mère.

Louis pèse la moitié du poids de Véronique.

Élise pèse plus que Louis et pèse moins que Simon.

Le poids de Simon est le tiers du poids de son père qui pèse plus que son épouse.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Louis a le poids le plus faible de la famille.	✓	
B. Dans la famille, Yves a le poids le plus élevé.		✓
C. Le poids d'Yves est égal à une fois et demie celui de sa femme.		✓
D. Simon et Élise réunis pèsent plus que leur père.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Notons V le poids de Véronique et Y celui d'Yves. Louis = $V/2$, Élise > Louis, Simon > Élise, Pierre > V > Louis, Yves > V > Louis : Louis est bien le plus léger.
- **B. FAUX** – On sait seulement que Pierre pèse plus que sa mère ; rien n'interdit que Pierre pèse plus qu'Yves. On ne peut pas conclure.
- **C. FAUX** – Simon = $Y/3$ > Élise > Louis = $V/2$, donc $Y > 1,5V$ strictement : l'égalité $Y = 1,5V$ est impossible.
- **D. FAUX** – Simon + Élise < $2 \times$ Simon = $2Y/3$ < Y : à eux deux ils pèsent moins que leur père.

Question 2

Sophie souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais elle ne dispose que de quelques éléments :

- Aucun membre de la famille n'a le même prénom ;
- Son père avait trois oncles, c'est-à-dire des frères de son père : Xavier, Yves et Zénobe ;
- Xavier, Yves et Zénobe ont eu quatre garçons (Alexis, Bastien, Cédric et Damien) et deux filles (Émilie et Florence) ;
- Yves a eu la famille la plus nombreuse ;
- Émilie est enfant unique ;
- Damien n'a qu'un frère et pas de sœur ;
- Florence est la sœur d'Alexis et a un autre frère ;
- Xavier n'a pas eu de fille ;
- Le seul frère de Cédric est plus âgé que Bastien.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le père d'Émilie avait trois frères.	✓	
B. Yves a eu 3 enfants.	✓	
C. Le frère de Damien est Cédric.		✓
D. Le grand-père de Sophie s'appelait Yves.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Le grand-père paternel de Sophie a trois frères (Xavier, Yves, Zénobe). Émilie, enfant unique, ne peut être ni chez Xavier (pas de fille) ni chez Yves (famille la plus nombreuse) : son père est Zénobe, dont les frères sont Xavier, Yves et le grand-père, soit trois frères.
- **B. VRAI** – Émilie est seule (1 enfant), Damien a exactement un frère (famille de 2 garçons), Florence a deux frères (famille de 3) : $1+2+3 = 6$. La famille la plus nombreuse, celle d'Yves, compte donc 3 enfants (Florence, Alexis et un autre garçon).
- **C. FAUX** – Les six enfants forment trois fratries : Émilie est enfant unique (1), Damien a exactement un frère et pas de sœur (2), Florence a pour frères Alexis et un autre garçon (3). Xavier n'a pas eu de fille : il est donc le père de la fratrie de deux garçons; Yves a la famille la plus nombreuse, c'est celle de Florence (3 enfants); Zénobe est le père d'Émilie. Reste à savoir lequel de Bastien ou Cédric accompagne Damien – et les deux répartitions satisfont TOUS les indices : (i) Yves = Alexis, Florence, Cédric et Xavier = Damien, Bastien : l'unique frère de Cédric est alors Alexis, plus âgé que Bastien, aucune contradiction; (ii) Yves = Alexis, Florence, Bastien et Xavier = Damien, Cédric : l'unique frère de Cédric est Damien, plus âgé que Bastien, aucune contradiction non plus. Le dernier indice n'exclut que le cas où Bastien serait le frère de Cédric, cas qui ne se produit dans aucune répartition possible : il n'apporte donc aucune information discriminante. On ne peut donc PAS conclure que le frère de Damien est Cédric, et dans ce format (« à partir de ces informations, on peut conclure que ») une affirmation non déductible est fausse. La lecture de la passe 1, selon laquelle Cédric « ne peut pas être dans la fratrie de trois » puisqu'il n'a qu'un frère, est erronée : dans la fratrie Alexis, Florence, Cédric, Cédric n'a bien qu'un seul frère, Alexis, et une sœur.
- **D. FAUX** – Yves est un oncle du père de Sophie, donc un frère du grand-père, pas le grand-père lui-même.

Question 3

Un tournoi d'échec accueille 128 joueurs. Le tournoi se joue en confrontation directe après tirage au sort. Chaque partie est à élimination directe. Le vainqueur continue le tournoi et celui-ci s'arrête pour le perdant. 6 300 coups ont été joués au cours du tournoi.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 127 parties ont dû être organisées pour décider du vainqueur du tournoi.	✓	
B. Le nombre moyen de coups joués par partie est supérieur à 25.	✓	
C. Le nombre moyen de parties par joueur est supérieur à 2.		✓
D. Le vainqueur du tournoi aura battu au total 8 adversaires.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Chaque partie élimine exactement un joueur; pour passer de 128 joueurs à 1 vainqueur il faut éliminer 127 joueurs, donc 127 parties.
- **B. VRAI** – $6300/127 \approx 49,6$ coups par partie en moyenne, ce qui est supérieur à 25.

- **C. FAUX** – Chaque partie compte pour 2 joueurs : $2 \times 127 = 254$ participations réparties sur 128 joueurs, soit $254/128 \approx 1,98 < 2$.
- **D. FAUX** – $128 = 2^7$: il y a 7 tours, le vainqueur bat 7 adversaires, pas 8.

Question 4

Un père lègue son héritage de 150 000 € à ses 5 descendants. Les 5 parts léguées ne sont pas égales. Mais on sait que chaque descendant recevrait la même part :

- si le père donnait 10 000 € de plus au premier;
- si le père reprenait 1 000 € au deuxième;
- si le père multipliait par 1,5 la part du troisième;
- si le père divisait la part du quatrième par 1,5;
- et que le père reprenait 4 000 € au cinquième.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le premier et le troisième ont reçu des parts d'une valeur identique.	✓	
B. C'est le deuxième qui a reçu la part la plus élevée.		✓
C. La part la plus élevée est égale à 1,5 fois la 2 ^e part la plus élevée.		✓
D. La moyenne des parts léguées est de 28 500 €.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Soit x la part commune. $p_1 = x - 10000$, $p_2 = x + 1000$, $p_3 = x/1,5$, $p_4 = 1,5x$, $p_5 = x + 4000$. La somme vaut $\frac{31}{6}x - 5000 = 150000$ d'où $x = 30000$. Alors $p_1 = 20000$ et $p_3 = 30000/1,5 = 20000$: parts identiques.
- **B. FAUX** – Les parts sont 20000, 31000, 20000, 45000 et 34000 : la plus élevée est celle du quatrième (45000), pas du deuxième.
- **C. FAUX** – $45000/31000 \approx 1,45 \neq 1,5$.
- **D. FAUX** – La moyenne est $150000/5 = 30000$ €, pas 28500 €.

Question 5

Pour le premier semestre de l'année, une entreprise reçoit une aide égale à 3 400 € pour organiser des formations à son personnel. L'entreprise organise pour ses 200 salariés, deux formations, d'une journée chacune et à des dates différentes du premier semestre de l'année :

- La formation A : maîtriser un tableur
- La formation B : comptabilité avancée.

Le service des ressources humaines a confié ces formations à deux intervenants externes : M. Xavier pour la formation A et M^{me} Dupond pour la formation B. Les intervenants et le service des ressources humaines ont trouvé un accord pour un tarif journalier en fonction du nombre de participants :

- 100 € par participant pour les dix premiers inscrits à la formation A et 20 € pour chaque participant supplémentaire;
- 120 € par participant pour les quinze premiers inscrits à la formation B et 25 € pour chaque participant supplémentaire.

L'accord n'inclut pas les frais de repas et déplacement. Ils sont facturés par les intervenants et s'ajoutent aux tarifs liés aux interventions. Pour les frais de repas et déplacement, M. Xavier a facturé 100 € et M^{me} Dupond 200 €.

On sait que :

- 30 salariés ont participé à une et une seule des deux formations proposées;
- 160 salariés n'ont suivi aucune des deux formations proposées;
- M. Xavier a encaissé au total 1 200 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 10 salariés ont suivi les deux formations proposées.	✓	
B. 20 salariés ont suivi la formation de M. Xavier.		✓
C. M ^{me} Dupond a encaissé au total 2 300 €.		✓
D. Compte tenu de l'aide reçue, ces formations n'ont coûté à l'entreprise qu'une somme équivalente aux frais de repas et de déplacement des intervenants.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – 200 salariés, 160 n'ont suivi aucune formation, 30 exactement une : $200 - 160 - 30 = 10$ ont suivi les deux.
- **B. FAUX** – M. Xavier a encaissé 1200 € dont 100 € de frais, soit 1100 € de tarif : $10 \times 100 = 1000$ € pour les dix premiers puis $100/20 = 5$ participants supplémentaires, soit 15 participants et non 20.
- **C. FAUX** – Les 30 « une seule formation » = $(15 - 10)$ en A seulement + $(n_B - 10)$ en B seulement, d'où $n_B = 35$. Tarif : $15 \times 120 + 20 \times 25 = 2300$ €, plus 200 € de frais = 2500 € encaissés au total.
- **D. VRAI** – Coût total $1200 + 2500 = 3700$ €, moins l'aide de 3400 € : reste 300 € = $100 + 200$ € de frais de repas et déplacement.

Raisonnement mathématique

Question 6

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + \ln(-2x + 2).$$

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. f est définie sur $]1; +\infty[$		✓
B. $f'(x) = \frac{x}{x-1}$	✓	
C. f est concave sur $\mathcal{D}_f$	✓	
D. f admet un maximum en 0.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – f est définie lorsque $-2x + 2 > 0$, soit $x < 1$: $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[$, pas $]1; +\infty[$.
- **B. VRAI** – $f'(x) = 1 + \frac{-2}{-2x+2} = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$.

- **C. VRAI** – $f'(x) = 1 - (1 - x)^{-1}$ donne $f''(x) = -(1 - x)^{-2} < 0$ sur $\mathcal{D}_f$: f est concave.
- **D. VRAI** – Sur $] - \infty; 1[$, $x - 1 < 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $-x$: positif avant 0, négatif après. f admet un maximum en 0 ($f(0) = \ln 2$).

Question 7

On considère un dé qui a été truqué pour que :

- le numéro 6 sorte une fois sur trois ;
- les autres numéros (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) ont chacun la même probabilité de sortir.

On lance ce dé une fois, et on note :

- S : l'évènement « le 6 est sorti » ;
- A : l'évènement « le 1 est sorti » ;
- T : l'évènement « le 3 est sorti » ;
- I : l'évènement « il est sorti un numéro impair ».

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Les évènements S et A ne sont pas indépendants.	✓	
B. Les évènements T et I sont incompatibles.		✓
C. Les évènements S et I sont équiprobables.		✓
D. $p(A) = \frac{1}{5}$		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – S et A sont incompatibles avec $p(S) = 1/3 > 0$ et $p(A) = 2/15 > 0$: $p(S \cap A) = 0 \neq p(S)p(A)$, donc ils ne sont pas indépendants.
- **B. FAUX** – Le 3 est impair : $T \subset I$, donc $T \cap I = T \neq \emptyset$. Ils ne sont pas incompatibles.
- **C. FAUX** – Les numéros 1 à 5 ont chacun la probabilité $(1 - 1/3)/5 = 2/15$. $p(I) = 3 \times 2/15 = 2/5 \neq 1/3 = p(S)$.
- **D. FAUX** – $p(A) = 2/15$, pas $1/5$.

Question 8

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 4).$$

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Sur $\mathcal{D}_f$, $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$		✓
B. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - [-2 ; 2]$	✓	
C. Sur $\mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$		✓
D. f est paire.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Pour $x < -2$, $x + 2 < 0$ et $x - 2 < 0$: $\ln(x + 2)$ et $\ln(x - 2)$ ne sont pas définis. L'égalité n'est valable que sur $]2; +\infty[$.

- **B. VRAI** – $x^2 - 4 > 0 \iff x < -2$ ou $x > 2$, soit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.
- **C. FAUX** – $f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$, pas $\frac{2}{x^2-4}$.
- **D. VRAI** – $\mathcal{D}_f$ est symétrique et $f(-x) = \ln((-x)^2 - 4) = f(x)$: f est paire.

Question 9

Deux évènements A et B d'un même univers vérifient :

$$p(A) = 0,2 \quad p(B) = 0,8 \quad p(A \cap B) = 0,1$$

Deux évènements indépendants C et D d'un même univers vérifient :

$$p(C) = 0,3 \quad p(C \cup D) = 0,65$$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $p(A \cap B) = 0,16$		✓
B. $p(A \cup B) = 0,9$	✓	
C. $p(D) = 0,5$	✓	
D. C et D sont des évènements indépendants.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – L'énoncé donne $p(A \cap B) = 0,1$; $0,16 = p(A)p(B)$ ne serait vrai que si A et B étaient indépendants, ce qui n'est pas le cas.
- **B. VRAI** – $p(A \cup B) = 0,2 + 0,8 - 0,1 = 0,9$.
- **C. VRAI** – C et D indépendants : $p(C \cup D) = 0,3 + p(D) - 0,3p(D) = 0,3 + 0,7p(D) = 0,65$, d'où $p(D) = 0,5$.
- **D. VRAI** – C'est une donnée de l'énoncé : C et D sont indépendants.

Question 10

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.		✓
B. On a $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$		✓
C. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.		✓
D. La fonction f possède deux extremums.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – $1 + x^2 > 0$ pour tout réel : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **B. FAUX** – $f'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$: le dénominateur est élevé au carré, ce qui n'est pas le cas dans l'affirmation.
- **C. FAUX** – $f(-x) = -f(x)$: f est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'origine, pas à l'axe des ordonnées.
- **D. VRAI** – $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = -1$ (minimum $-1/2$) et $x = 1$ (maximum $1/2$) : deux extremums.

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Question 11

Monsieur Martin, directeur d'une entreprise, projette d'aménager un local disponible, en cafétéria.

Afin de connaître le pourcentage de salariés favorables à la création de cette cafétéria, Monsieur Martin réalise, le premier février de cette année, une enquête auprès de l'ensemble de son personnel, composé de 300 salariés. Dans cette entreprise, deux tiers des salariés sont des femmes.

Les résultats de cette enquête sont les suivants :

- 60 % des femmes sont favorables à la création d'une cafétéria ;
- Deux tiers des salariés (hommes et femmes confondus) sont favorables à la création d'une cafétéria.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le nombre de femmes favorables à la création d'une cafétéria est égal à 120.	✓	
B. La proportion d'hommes favorables à la création d'une cafétéria est inférieure à 60 %.		✓
C. Le nombre d'hommes qui ne sont pas favorables à la création d'une cafétéria est inférieur à 30.	✓	
D. 35 % des salariés favorables à la création d'une cafétéria sont des hommes.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – 200 femmes (deux tiers de 300), 60 % favorables : $0,6 \times 200 = 120$.
- B. **FAUX** – Favorables au total : $\frac{2}{3} \times 300 = 200$, dont 120 femmes, donc 80 hommes sur 100 : 80 %, supérieur à 60 %.
- C. **VRAI** – Hommes non favorables : $100 - 80 = 20 < 30$.
- D. **FAUX** – Part des hommes parmi les favorables : $80/200 = 40 \%$, pas 35 %.

Question 12

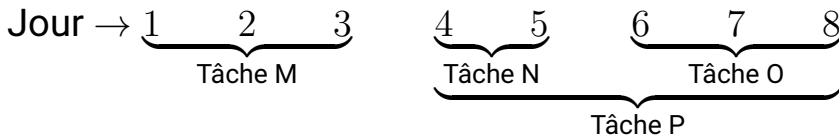
Suite aux résultats de ce sondage, Monsieur Martin décide donc le lancement de ce projet dont la planification des tâches est donnée dans le tableau ci-dessous :

Tâche	Libellé	Durée en jours	Tâches antécédentes
A	Plomberie	3	
B	Électricité	2	
C	Isolation phonique	3	A et B
D	Pose de l'évier	1	A
E	Peinture (portes et plafond)	1	C et D
F	Carrelage (sol et murs)	3	C, D et E
G	Installation mobilier	1	F

Une tâche débute toujours en début de journée et se termine toujours en fin de journée. Une tâche ne peut débuter que lorsque les éventuelles tâches antécédentes sont terminées.

Pour mieux visualiser l'enchaînement des différentes tâches, un calendrier peut être réalisé selon le modèle suivant :

Exemple fictif :



Lecture du calendrier de l'exemple :

- La tâche M dure 3 jours ;
- La tâche N dure 2 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche M (tâche antécédente) ;
- La tâche O dure 3 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche N (tâche antécédente) ;
- La tâche P dure 4 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche M (tâche antécédente).

À des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La durée totale des travaux est égale à 14 jours.		✓
B. Les travaux de peinture des portes et du plafond peuvent démarrer le 4 ^e jour.		✓
C. Si les travaux d'isolation duraient un jour de plus que prévu (4 jours au lieu de 3 jours), cela décalerait la fin de l'ensemble des travaux d'un jour.	✓	
D. Si les travaux d'électricité duraient un jour de plus que prévu (3 jours au lieu de 2 jours), la durée totale des travaux serait inchangée.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** — A : jours 1-3, B : jours 1-2, C (après A et B) : jours 4-6, D (après A) : jour 4, E (après C et D) : jour 7, F : jours 8-10, G : jour 11. Durée totale 11 jours.
- **B. FAUX** — La peinture E attend la fin de l'isolation C (jour 6) : elle ne peut démarrer que le 7^e jour.
- **C. VRAI** — C est sur le chemin critique (A-C-E-F-G) : si C dure 4 jours, E passe au jour 8, F aux jours 9-11, G au jour 12, soit un décalage d'un jour.
- **D. VRAI** — Si B dure 3 jours, elle se termine le jour 3 comme A ; C débute toujours le jour 4 : la durée totale reste de 11 jours.

Question 13

Le local aménagé en cafétéria est une pièce rectangulaire dont les dimensions sont les suivantes

- Largeur = 5 mètres ;
- Longueur = 10 mètres ;
- Hauteur = 3 mètres.

Sur chacun de ses quatre murs, ce local est équipé d'une porte rectangulaire dont la largeur est 1,25 mètre et dont la hauteur est de 2 mètres. Monsieur Martin opte pour la pose d'un carrelage sur le sol et sur tous les murs du local et pour la pose d'une peinture sur le plafond et les portes.

Monsieur Martin visite un premier fournisseur de carrelage qui lui propose un carrelage mural et un carrelage pour le sol dont le coût total est de 4 500 €.

Lors de la visite auprès d'un deuxième fournisseur de carrelage, Monsieur Martin est séduit par deux produits. Le prix au m^2 du carrelage mural de ce deuxième fournisseur est supérieur de 5 € à celui du premier fournisseur.

Mais pour être compétitif, le deuxième fournisseur propose à Monsieur Martin, un prix au m^2 sur le carrelage au sol égal à la moitié de celui du premier fournisseur car il en possède une importante quantité en stock.

Monsieur Martin choisit le deuxième fournisseur dont la facture totale est de 3 650 €.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La surface totale à carreler (sol + murs) est égale à 140 m^2		✓
B. Le prix au m^2 du carrelage mural du deuxième fournisseur est égal à 25 €.		✓
C. Le prix au m^2 du carrelage au sol du premier fournisseur est égal à 45 €.		✓
D. La remise accordée par le deuxième fournisseur pour le carrelage au sol est égale à 1 250 €.	✓	

Corrigé

- A. **FAUX** – Sol : $5 \times 10 = 50 \text{ m}^2$. Murs : périmètre $30 \text{ m} \times 3 = 90 \text{ m}^2$ moins 4 portes de $1,25 \times 2 = 2,5 \text{ m}^2$ soit 10 m^2 : 80 m^2 . Total 130 m^2 , pas 140.
- B. **FAUX** – Soit m et s les prix au m^2 (mural, sol) du premier fournisseur : $80m + 50s = 4500$ et $80(m + 5) + 25s = 3650$, soit $80m + 25s = 3250$. Par différence $25s = 1250$, $s = 50$, puis $m = 25$. Le mural du deuxième fournisseur vaut $25 + 5 = 30 \text{ €/m}^2$.
- C. **FAUX** – Le carrelage au sol du premier fournisseur vaut 50 €/m^2 (25 € est le prix du mural).
- D. **VRAI** – Remise au sol : $50 \times (50 - 25) = 1250 \text{ €}$.

Question 14

Pour la peinture du plafond et des portes, quatre types de peintures (P1, P2, P3 et P4) figurent dans l'ensemble des choix de Monsieur Martin qui souhaite réaliser 3 couches. Pour chacun des 4 types de peintures, un litre de peinture couvre une surface de 8 m^2 .

Il dispose des notes (de 0 à 10) sur 4 caractéristiques de ces 4 types de peintures :

Type peinture	Résistance aux chocs	Résistance à l'humidité	Prix	Éventail de couleurs
P1	8	10	4	5
P2	9	7	4	5
P3	6	7	8	7
P4	5	6	8	8

Pour faire son choix, Monsieur Martin accorde une importance différente aux quatre caractéristiques et leur donne les poids suivants :

- 30 % pour la résistance aux chocs ;
- 20 % pour la résistance à l'humidité ;
- 40 % pour le prix ;
- 10 % pour l'éventail des couleurs.

Les données de cet exercice peuvent être présentées sous forme de matrice. Définition d'une matrice : Soient n et p deux entiers positifs, on appelle matrice A de dimensions (n, p) , tout tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes de la forme :

$$A_{(n,p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est donc le terme général de la matrice A se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Produit de deux matrices $A \times B$:

Pour pouvoir réaliser le produit de deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice A soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice B .

On appellera alors C la matrice égale à $A \times B$ avec :

- a_{ij} qui est le terme général de la matrice A
- b_{ij} qui est le terme général de la matrice B
- c_{ij} qui est le terme général de la matrice C

$C_{(n,q)} = A_{(n,p)} \times B_{(p,q)}$ est une matrice à n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple : Déterminer $C = A \times B$ avec :

$$A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Avec par exemple : $2 = 1 \times 2 + 0 \times 1$.

Explication des calculs : c_{11} se trouve sur la première ligne et la première colonne de la matrice C . Pour trouver sa valeur, on fait le produit de la première ligne de la matrice A par la première colonne de la matrice B de la façon suivante :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2.$$

On appelle C la matrice des caractéristiques des 4 types de peintures et P la matrice des poids attribués par Monsieur Martin avec :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0, \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

La matrice des notes attribuées par Monsieur Martin sera notée N (avec $N = C \times P$) et son terme général sera noté n_{ij} .

Monsieur Martin achètera le type de peinture qui a obtenu la note la plus forte.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. N est une matrice à une ligne et quatre colonnes.		✓
B. La note la plus forte attribuée par Monsieur Martin est égale à 7,1.	✓	
C. n_{41} correspond à la note la plus faible.		✓
D. Monsieur Martin doit acheter 22,5 litres de peinture de type P2.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – C est de dimensions $(4, 4)$ et P de dimensions $(4, 1)$: $N = C \times P$ est une matrice à 4 lignes et 1 colonne.
- **B. VRAI** – Notes : $P1 = 2,4 + 2 + 1,6 + 0,5 = 6,5$; $P2 = 2,7 + 1,4 + 1,6 + 0,5 = 6,2$; $P3 = 1,8 + 1,4 + 3,2 + 0,7 = 7,1$; $P4 = 1,5 + 1,2 + 3,2 + 0,8 = 6,7$. La plus forte est 7,1.
- **C. FAUX** – $n_{41} = 6,7$ (P4); la note la plus faible est $n_{21} = 6,2$ (P2).
- **D. FAUX** – Surface : plafond $50 \text{ m}^2 + 4$ portes de $2,5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$, trois couches : 180 m^2 , soit $180/8 = 22,5$ litres. La quantité est exacte mais Monsieur Martin achète la peinture P3 (note maximale), pas P2.

Question 15

Dans sa cafétéria, Monsieur Martin souhaite moduler le prix d'un repas (entrée + plat + dessert) en fonction du salaire mensuel du salarié.

On retient 2 tranches de salaires et donc 2 prix de repas différents.

Le prix du repas de la tranche 2 est majoré de 25 % par rapport à celui de la tranche 1.

Tranche des salaires	Prix du repas en euros
1	x
2	7

On sait que 40 % des salariées femmes sont dans la tranche 1, que 70 % des salariés hommes sont dans la tranche 2 et qu'il n'y a pas eu de mouvement de personnel depuis l'enquête réalisée le 1^{er} février de cette année.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $x \leq 5,25$		✓
B. 110 salariés hommes sont dans la tranche 1.		✓
C. Si tous les hommes déjeunent à la cafétéria (un repas par personne), ils régleront au total 658 €.	✓	
D. Si tout le personnel déjeune à la cafétéria (un repas par personne), un jour donné, la recette de la cafétéria sera supérieure à 2 000 €.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – $1,25x = 7$ donne $x = 5,6 > 5,25$.
- **B. FAUX** – 100 hommes, 70 % en tranche 2 : 30 hommes en tranche 1. (110 est l'effectif total de la tranche 1, femmes comprises : $0,4 \times 200 + 30 = 110$.)
- **C. VRAI** – $30 \times 5,6 + 70 \times 7 = 168 + 490 = 658$ €.
- **D. FAUX** – Tranche 1 : 110 salariés à 5,6 € = 616 €; tranche 2 : 190 salariés à 7 € = 1330 €; recette $1946 < 2000$ €.