

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Question 14

Pour la peinture du plafond et des portes, quatre types de peintures (P1, P2, P3 et P4) figurent dans l'ensemble des choix de Monsieur Martin qui souhaite réaliser 3 couches. Pour chacun des 4 types de peintures, un litre de peinture couvre une surface de 8 m^2 .

Il dispose des notes (de 0 à 10) sur 4 caractéristiques de ces 4 types de peintures :

Type peinture	Résistance aux chocs	Résistance à l'humidité	Prix	Éventail de couleurs
P1	8	10	4	5
P2	9	7	4	5
P3	6	7	8	7
P4	5	6	8	8

Pour faire son choix, Monsieur Martin accorde une importance différente aux quatre caractéristiques et leur donne les poids suivants :

- 30 % pour la résistance aux chocs;
- 20 % pour la résistance à l'humidité;
- 40 % pour le prix;
- 10 % pour l'éventail des couleurs.

Les données de cet exercice peuvent être présentées sous forme de matrice. Définition d'une matrice : Soient n et p deux entiers positifs, on appelle matrice A de dimensions (n, p) , tout tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes de la forme :

$$A_{(n,p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est donc le terme général de la matrice A se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Produit de deux matrices $A \times B$:

Pour pouvoir réaliser le produit de deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice A soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice B .

On appellera alors C la matrice égale à $A \times B$ avec :

- a_{ij} qui est le terme général de la matrice A
- b_{ij} qui est le terme général de la matrice B
- c_{ij} qui est le terme général de la matrice C

$C_{(n,q)} = A_{(n,p)} \times B_{(p,q)}$ est une matrice à n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple : Déterminer $C = A \times B$ avec :

$$A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Avec par exemple : $2 = 1 \times 2 + 0 \times 1$.

Explication des calculs : c_{11} se trouve sur la première ligne et la première colonne de la matrice C . Pour trouver sa valeur, on fait le produit de la première ligne de la matrice A par la première colonne de la matrice B de la façon suivante :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2.$$

On appelle C la matrice des caractéristiques des 4 types de peintures et P la matrice des poids attribués par Monsieur Martin avec :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0, \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

La matrice des notes attribuées par Monsieur Martin sera notée N (avec $N = C \times P$) et son terme général sera noté n_{ij} .

Monsieur Martin achètera le type de peinture qui a obtenu la note la plus forte.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. N est une matrice à une ligne et quatre colonnes.		✓
B. La note la plus forte attribuée par Monsieur Martin est égale à 7,1.	✓	
C. n_{41} correspond à la note la plus faible.		✓
D. Monsieur Martin doit acheter 22,5 litres de peinture de type P2.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – C est de dimensions $(4,4)$ et P de dimensions $(4,1)$: $N = C \times P$ est une matrice à 4 lignes et 1 colonne.
- **B. VRAI** – Notes : $P1 = 2,4 + 2 + 1,6 + 0,5 = 6,5$; $P2 = 2,7 + 1,4 + 1,6 + 0,5 = 6,2$; $P3 = 1,8 + 1,4 + 3,2 + 0,7 = 7,1$; $P4 = 1,5 + 1,2 + 3,2 + 0,8 = 6,7$. La plus forte est 7,1.
- **C. FAUX** – $n_{41} = 6,7$ (P4); la note la plus faible est $n_{21} = 6,2$ (P2).
- **D. FAUX** – Surface : plafond 50 m^2 + 4 portes de $2,5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$, trois couches : 180 m^2 , soit $180/8 = 22,5$ litres. La quantité est exacte mais Monsieur Martin achète la peinture P3 (note maximale), pas P2.