

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

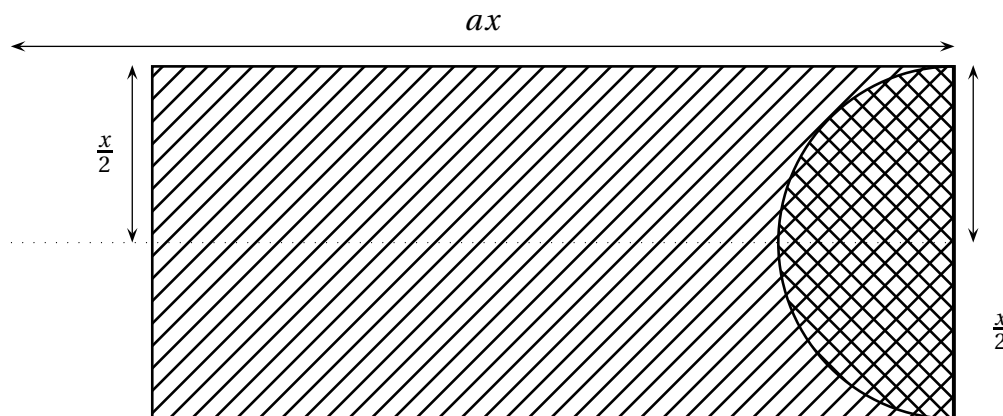
M. Dupont est propriétaire d'une exploitation agricole. Il possède un champ représenté dans le schéma ci-dessous par la zone hachurée. On appelle P_1 cette partie.

La partie quadrillée notée P_2 , qui représente un demi-disque de rayon $\frac{x}{2}$, appartient à son voisin M. Michel.

Soient $x > 0$ et $a > 1$.

Notons que toutes les mesures sont exprimées en mètres.

Par souci de simplicité, on suppose que $\pi \approx 3,14$.



Question 15

Soit I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $(x ; y)$ un couple de réels appartenant respectivement à I et à J .

On appelle fonction numérique de deux variables réelles, toute fonction, qui au couple $(x ; y)$ associe un réel noté $f(x ; y)$. Explicitement, nous avons :

$$\begin{aligned} f : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x ; y) &\mapsto f(x ; y) \end{aligned}$$

Exemple : on définit la fonction f « aire d'un rectangle » comme suit :

$$\begin{aligned} f :]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (x ; y) &\mapsto f(x ; y) = xy \end{aligned}$$

où x et y représentent la longueur et la largeur du rectangle.

Finalement, M. Dupont décide de produire de l'huile de tournesol et du jus de tomate. Soient n_1 le nombre total des plants de tomates plantés au début de la saison et n_2 le nombre total des plants de tournesols plantés au début de la saison.

M. Dupont a les informations suivantes :

- Un plant de tomate produit 0,75 litre de jus de tomate sur une saison ;
- Un plant de tournesol produit 0,5 litre d'huile sur une saison ;
- Le prix de vente d'un litre de jus de tomate est égal à 2 € ;
- Le prix de vente d'un litre d'huile de tournesol est égal à 3,50 € ;
- Le prix d'achat d'un plant de tomate est de 0,50 € ;
- Le prix d'achat d'un plant de tournesol est de 0,70 € ;
- Le coût d'entretien et de récolte, à la fois pour les tomates et les tournesols, est égal à 0,3 € par plant planté ;
- Le prix total d'engrais utilisé durant la saison est égal à $0,01 \times n_1 \times n_2$;
- À cause des maladies et du climat, 10 % des plants de tomates plantés et 20 % des plants de tournesols plantés meurent avant toute production ;
- Les coûts fixes durant la saison, indépendants du nombre de plants, sont de 20 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le coût total, noté C , est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $C(n_1 ; n_2) = 0,8n_1 + n_2 + 0,01n_1n_2 + 20.$	✓	
B. Le prix total des ventes, noté T , est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $T(n_1 ; n_2) = 1,5n_1 + 1,75n_2.$		✓
C. Le bénéfice total, noté B , est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut : $B(n_1 ; n_2) = 0,55n_1 + 0,4n_2 - 0,01n_1n_2 - 20.$	✓	
D. Supposons que le nombre total des plants de tomates plantés au début de la saison est égal à celui des plants de tournesols. On peut en déduire que le bénéfice total sera positif lorsque le nombre total des plants plantés est compris entre 32 et 62.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Coût = achat $(0,5n_1 + 0,7n_2)$ + entretien $0,3(n_1 + n_2)$ + engrais $0,01n_1n_2$ + coûts fixes 20 = $0,8n_1 + n_2 + 0,01n_1n_2 + 20$.
- **B. FAUX** – Seuls 90 % des tomates et 80 % des tournesols produisent : $T = 0,9n_1 \times 0,75 \times 2 + 0,8n_2 \times 0,5 \times 3,5 = 1,35n_1 + 1,4n_2$. L'expression $1,5n_1 + 1,75n_2$ oublie la mortalité.
- **C. VRAI** – $B = T - C = (1,35 - 0,8)n_1 + (1,4 - 1)n_2 - 0,01n_1n_2 - 20 = 0,55n_1 + 0,4n_2 - 0,01n_1n_2 - 20$.
- **D. FAUX** – Avec $n_1 = n_2 = n$: $B = -0,01n^2 + 0,95n - 20 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 95n + 2000 < 0$, racines $(95 \pm \sqrt{1025})/2 \approx 31,49$ et $63,51$: bénéfice positif pour n entier de 32 à 63 ($B(63) = 0,16 > 0$), et non 62. Si « nombre total des plants » désigne $n_1 + n_2 = 2n$, l'intervalle serait 64 à 126 : faux dans les deux lectures.