

Raisonnement mathématique

Question 10

Soit X une variable aléatoire discrète. L'ensemble de ses valeurs possibles est l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

X est définie de la manière suivante :

- p est un réel fixé dans l'intervalle $]0; 1[$
- pour tout entier non nul k , on pose : $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $P(X \geq 2) = 1 - p$.	✓	
B. $P(X \leq 2) = p(2 - p)$.	✓	
C. Soit n un entier naturel non nul. On peut en déduire que $P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n + 1) = 1 - (1 - p)^n$.		✓
D. Soit la fonction suivante $f(p) = \frac{1}{2}P(X = 2) + 1$. On peut confirmer que la fonction f admet deux racines réelles distinctes.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - p$.
- B. **VRAI** – $P(X \leq 2) = p + (1 - p)p = p(2 - p)$.
- C. **FAUX** – Somme géométrique : $P(X = 1) + \dots + P(X = n + 1) = p \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{n+1}$, et non $1 - (1 - p)^n$.
- D. **VRAI** – $f(p) = \frac{1}{2}(1 - p)p + 1 = -\frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} + 1$; $f(p) = 0 \iff p^2 - p - 2 = 0 \iff p = 2$ ou $p = -1$: deux racines réelles distinctes (discriminant 9).