

Raisonnement mathématique

Question 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$.

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. On a $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.	✓	
B. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$.	✓	
C. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0$.	✓	
D. L'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution : $\alpha = \ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Il faut $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$; le dénominateur est positif, donc $e^x > 1 \iff x > 0 : \mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.
- **B. VRAI** – $f(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)$, $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$.
- **C. VRAI** – Pour $x > 0$, $0 < \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 1$ donc $f(x) < 0$.
- **D. FAUX** – Comme $f < 0$ sur $\mathcal{D}_f$, $f(x) = 1$ n'a aucune solution (algébriquement $e^x = \frac{1+e}{1-e} < 0$). Le α proposé est en fait la solution de $f(x) = -1$.