

raisonnement mathématique

Question 12

Soit la fonction f_n définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}, \text{ avec } n \geq 2.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

On note S_n le point de $\mathcal{C}_n$ qui a pour abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'_n(x) = -2nx^n e^{-x^2}$.		✓
B. Le maximum de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est $\sqrt{\frac{n}{2}}$.		✓
C. Pour tout $n \geq 2$, $S_2 \in \mathcal{C}_n$.	✓	
D. Pour tout $n \geq 2$, l'axe des abscisses est la tangente à $\mathcal{C}_n$ à l'origine du repère.	✓	

Corrigé

- A. **FAUX** – $f'_n(x) = (nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$, pas $-2nx^n e^{-x^2}$.
- B. **FAUX** – $\sqrt{n/2}$ est l'abscisse du maximum, pas sa valeur : le maximum vaut $(n/2)^{n/2} e^{-n/2}$ (pour $n = 2 : 1/e \neq 1$).
- C. **VRAI** – $S_2(1; e^{-1})$ et $f_n(1) = 1^n e^{-1} = e^{-1}$ pour tout $n : S_2$ appartient à toutes les courbes.
- D. **VRAI** – $f_n(0) = 0$ et $f'_n(0) = 0$ pour $n \geq 2$: la tangente à l'origine est $y = 0$, l'axe des abscisses.