

raisonnement mathématique

Question 9

Soit la fonction f_k définie pour tout x de $]0; 1[$ par

$$f_k(x) = x[\ln(x)]^2 + kx, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

On note A_k le point de $\mathcal{C}_k$ qui a pour abscisse 1.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $\mathcal{C}_0$ admet deux tangentes parallèles à (OI) .	✓	
B. La tangente à $\mathcal{C}_k$ en A_k est la droite (OA_k) .	✓	
C. Pour tout x de $]0; 1[$, $f'_1(x) = [\ln(x) + 1]^2$.	✓	
D. Il existe au moins une valeur réelle de k tel que $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – $f(x) = x(\ln x)^2$ donne $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2)$, qui s'annule en $x = e^{-2}$ et en $x = 1$; les tangentes correspondantes ont pour équations $y = 4e^{-2}$ et $y = 0$, deux droites parallèles à (OI) : l'affirmation est VRAIE. Tout tient à l'ensemble de définition : le tapuscrit annonce $]0; 1[$, ce qui exclurait $x = 1$ et ne laisserait qu'une seule tangente horizontale (lecture de la passe 1). Mais l'énoncé définit juste après A_k comme « le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse 1 », et l'affirmation B (la tangente en A_k est (OA_k)) n'est vraie qu'en $x = 1$: la tangente en a passe par O si et seulement si $f_k(a) - a \cdot f'_k(a) = -2a \ln a = 0$, c'est-à-dire $a = 1$. L'intervalle $]0; 1[$ est donc une coquille pour $]0; +\infty[$ – seule lecture qui rende l'énoncé cohérent, et c'est déjà celle que les deux passes retiennent pour trancher B = V. Trancher A en excluant 1 du domaine tout en gardant B = V serait contradictoire. Enfin, en convention française deux droites confondues sont parallèles : la tangente $y = 0$, qui est la droite (OI) elle-même, compte bien comme tangente parallèle à (OI) .
- **B. VRAI** – $A_k(1; k)$ et $f'_k(1) = 0 + 0 + k = k$: tangente $y = k(x - 1) + k = kx$, droite passant par O , c'est (OA_k) (pour $k = 0$, c'est l'axe (OI)).
- **C. VRAI** – $f'_1(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 1 = (\ln x + 1)^2$.
- **D. VRAI** – $f_k(x) = x[(\ln x)^2 + k] = 0 \iff (\ln x)^2 = -k$: pour $k < 0$, $x = e^{-\sqrt{-k}} \in]0; 1[$ convient (par ex. $k = -1$, $x = 1/e$).