

Raisonnement mathématique

Question 12

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n > 0$).

U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

Soit A l'évènement « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

Soit B l'évènement « après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve.

À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2 :

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ €
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

Soit X_n la variable aléatoire qui prend pour valeurs les gains algébriques (gains moins mises) du joueur.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $P(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$.	✓	
B. $P(B) = \frac{6}{4(n+2)}$.		✓
C. L'espérance de X_n est $E(X_n) = \frac{3n^2 - 62n - 230}{4n + 12}$.		✓
D. Le jeu est favorable au joueur (l'espérance est positive pour le joueur) pour $n \geq 20$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Retour à la configuration initiale : (blanche de U_1 puis blanche de U_2) ou (noire puis noire) : $P(A) = \frac{n}{n+3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3n+6}{4(n+3)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{n+2}{n+3}$.
- **B. FAUX** – U_2 ne garde qu'une blanche si l'on y met une noire (prob. $\frac{3}{n+3}$) puis qu'on en retire une blanche (prob. $\frac{2}{4}$) : $P(B) = \frac{6}{4(n+3)}$, pas $\frac{6}{4(n+2)}$.
- **C. FAUX** – Gains : $2n - 20$ avec prob. $\frac{6}{4(n+3)}$, $n - 20$ avec prob. $\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$, -20 avec prob. $\frac{n}{4(n+3)}$.
 $E(X_n) = \frac{6(2n-20) + 3(n+2)(n-20) - 20n}{4(n+3)} = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4n + 12}$: le terme constant est -240 , pas -230 .
- **D. FAUX** – $3n^2 - 62n - 240 = 0$ a pour racine positive $n = 24$; l'espérance est positive seulement pour $n > 24$, et $E(X_{20}) = -\frac{70}{23} < 0$. (Même avec la formule en -230 , $E(X_{20}) < 0$.)