

Raisonnement mathématique

Question 10

Soit f la fonction définie pour tout x de D par $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln(x)$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Soit g la fonction définie pour tout x de D par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. g est positive sur $]1; +\infty[$.	✓	
B. g est convexe sur D .		✓
C. Pour tout x de D , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.	✓	
D. $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Γ , la courbe d'équation $y = \ln(x)$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ sur $D =]0; +\infty[$, g est croissante et $g(1) = 0$, donc $g \geq 0$ sur $]1; +\infty[$.
- B. **FAUX** – $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: g est concave, pas convexe.
- C. **VRAI** – $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x$, donc $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.
- D. **FAUX** – $f(x) - \ln x = \ln x \left(\frac{x-1}{x} - 1\right) = -\frac{\ln x}{x}$, négatif pour $x > 1$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Γ sur $]1; +\infty[$.