

Raisonnement mathématique

Question 9

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d quatre réels. Soit $\mathcal{C}_f$ La courbe représentative de la fonction f qui admet aux points A(1; 2) et B(0; -3) deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + x - 3$.	✓	
B. Sur $] -\infty ; 0]$, la fonction f a pour maximum $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{42}}{12}$.		✓
C. La fonction f est croissante sur $[0; 1]$.	✓	
D. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $f(0) = -3 \Rightarrow d = -3$; $f'(0) = 1 \Rightarrow c = 1$; $f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 4$; $f'(1) = 1 \Rightarrow 3a + 2b = 0$. D'où $a = -8$, $b = 12$.
- **B. FAUX** – $f'(x) = -24x^2 + 24x + 1$ s'annule en $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{42}}{12}$ ($x_1 \approx -0,04$, $x_2 \approx 1,04$). Sur $] -\infty ; 0]$, f décroît de $+\infty$ jusqu'à $f(x_1) \approx -3,02$ puis croît : elle n'a pas de maximum (elle tend vers $+\infty$). Le nombre proposé est d'ailleurs l'abscisse x_2 du maximum local, pas une valeur.
- **C. VRAI** – Sur $[0; 1] \subset [x_1; x_2]$, $f'(x) > 0$ (trinôme de coefficient dominant négatif, positif entre ses racines) : f est croissante.
- **D. FAUX** – f va de $+\infty$ à un minimum local $f(x_1) \approx -3,02 < 0$, remonte à un maximum local $f(x_2) \approx 2,02 > 0$, puis tend vers $-\infty$: trois solutions (par exemple $f(-1) = 16$, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$, $f(2) = -17$).