

Raisonnement mathématique

Question 8

Soit f la fonction définie pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln^2(x) + \ln(x)$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J) .

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points : A d'abscisse 1 et B d'abscisse x_B .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le minimum de la fonction f est $-\frac{1}{4}$	✓	
B. $x_B > 1$		✓
C. La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point B est parallèle à la droite d'équation $y = e - e^x$.	✓	
D. La fonction F définie pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln^2(x)) - x \ln(x) - x$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – En posant $u = \ln x$, $f = u^2 + u$, trinôme minimal en $u = -\frac{1}{2}$ (soit $x = e^{-1/2}$) avec valeur $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.
- **B. FAUX** – $f(x) = \ln x(\ln x + 1) = 0 \iff \ln x = 0$ ou $\ln x = -1$, donc $x_B = e^{-1} = 1/e < 1$.
- **C. VRAI** – $f'(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x}$, donc $f'(1/e) = (-2+1)e = -e$. La droite $y = e - ex$ a pour coefficient directeur $-e$: T lui est parallèle.
- **D. FAUX** – $F'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - \ln x - 1 - 1 = \ln^2 x + \ln x - 2 \neq f(x)$. Une primitive serait $x \ln^2 x - x \ln x + x$.