

Session du 2014 – 18 questions, 4 affirmations à qualifier VRAI ou FAUX par question. Calculatrice de la plateforme uniquement.

Raisonnement logique

Question 1

Dans un cinéma, on vend des glaces et des popcorns, les dimanches après-midi. La monnaie locale est l'UM. Les glaces achetées 3 UM sont revendues 4 UM et les popcorns vendues 5 UM sont achetées 2,5 UM. Par beau temps, le cinéma vend 200 glaces et 150 popcorns. Par mauvais temps, l'affluence au cinéma est plus forte et l'on y vend 150 glaces et 250 popcorns. Le samedi, le gérant achète ses produits en fonction des prévisions météorologiques du dimanche. Par exemple, si le beau temps est prévu, il achètera 200 glaces et 150 popcorns. Ses produits étant périssables, il ne pourra conserver les invendus pour le dimanche suivant.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le gérant fait un bénéfice maximal lors d'une journée de mauvais temps qu'il avait anticipée.	✓	
B. Quel que soit le temps et sa prévision, le gérant aura toujours un bénéfice.	✓	
C. Le bénéfice minimal sera obtenu lorsque le gérant prévoira du mauvais temps et que le dimanche sera beau.	✓	
D. Ayant subi quelques déboires de prévision, il décide d'acheter tous les samedis 150 glaces et 150 popcorns. Cela lui assurera un bénéfice de 525 UM chaque dimanche.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Marge unitaire : 1 UM par glace (4-3), 2,5 UM par popcorn (5-2,5). Mauvais temps prévu et réalisé : $150 \times 1 + 250 \times 2,5 = 775$ UM, contre 575 UM pour un beau temps anticipé, 375 UM (beau prévu, mauvais réel) et 275 UM (mauvais prévu, beau réel). 775 est bien le maximum.
- **B. VRAI** – Les quatre scénarios donnent 575, 375, 775 et 275 UM : le plus faible (mauvais prévu, dimanche beau : recettes $150 \times 4 + 150 \times 5 = 1350$, achats $150 \times 3 + 250 \times 2,5 = 1075$) reste positif. Il y a toujours un bénéfice.
- **C. VRAI** – Mauvais temps prévu (150 glaces, 250 popcorns achetés) et dimanche beau (150 popcorns vendus seulement, 100 perdus) : bénéfice $1350 - 1075 = 275$ UM, le minimum des quatre cas.
- **D. VRAI** – Avec 150 glaces et 150 popcorns, tout est vendu quel que soit le temps (demandes 200/150 ou 150/250). Bénéfice $150 \times 1 + 150 \times 2,5 = 525$ UM chaque dimanche.

Question 2

Un grossiste achète 2 articles pour un total de 114 €. Il les revend à un détaillant en faisant une marge de 25 % sur le premier article et de 30 % sur le deuxième. Le détaillant tente de les vendre dans son magasin en affichant des prix lui permettant de s'octroyer une marge de 20 € sur le premier article et de 15 € sur le second. Finalement, après avoir accordé une réduction de 20 % sur le prix affiché du premier article, le détaillant réussit à les vendre tous les deux au même prix.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le grossiste a acheté le premier article 50 €.		✓
B. Le grossiste a gagné plus de 30 € en revendant les 2 articles au détaillant.	✓	
C. Les 2 articles ont été vendus 80 € pièce au client final.	✓	
D. Le détaillant a gagné plus de 20 € en revendant les 2 articles à son client.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – Soit x et y les prix d'achat, $x + y = 114$. Prix affichés $1,25x + 20$ et $1,3y + 15$; égalité après remise : $0,8(1,25x + 20) = 1,3y + 15$ soit $x + 16 = 1,3y + 15$, d'où $x = 1,3y - 1$, $2,3y = 115$, $y = 50$ et $x = 64$. Le premier article a coûté 64 €, c'est le second qui a coûté 50 €.
- **B. VRAI** – Gain du grossiste : $0,25 \times 64 + 0,30 \times 50 = 16 + 15 = 31 \text{ €} > 30 \text{ €}$.
- **C. VRAI** – Prix de vente final du second : $1,3 \times 50 + 15 = 80 \text{ €}$; du premier : $0,8(1,25 \times 64 + 20) = 0,8 \times 100 = 80 \text{ €}$. Les deux sont vendus 80 € pièce.
- **D. FAUX** – Le détaillant achète 80 € et 65 €, soit 145 €, et vend 160 € : gain 15 €, pas plus de 20 €.

Question 3

Un cycliste doit effectuer un aller-retour entre 2 villes distantes de x km en 6 h. À mi-parcours, soit après x km, il remarque que sa vitesse moyenne a été trop faible de 2 km/h pour respecter son timing.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet doit être de $\frac{x}{6}$ km/h pour respecter son timing.		✓
B. Il a mis $\frac{x}{\frac{x}{3}-2}$ h pour effectuer l'aller.	✓	
C. Sa vitesse moyenne pour le retour doit être de $\frac{x}{6-\frac{x}{2}-2}$ km/h pour respecter son timing.		✓
D. Sa vitesse moyenne pour le retour devra être de $\frac{x}{6-\frac{x}{2}-2} - (\frac{x}{3} - 4)$ km/h supérieure à celle de l'aller pour respecter son timing.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – L'aller-retour fait $2x$ km en 6 h : vitesse moyenne requise $\frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$ km/h, et non $\frac{x}{6}$.
- **B. VRAI** – Sa vitesse à l'aller a été $\frac{x}{3} - 2$ km/h, donc la durée de l'aller est $\frac{x}{\frac{x}{3}-2}$ h.
- **C. FAUX** – Temps restant : $6 - \frac{x}{\frac{x}{3}-2}$ h; vitesse de retour requise $\frac{x}{6-\frac{x}{\frac{x}{3}-2}}$. La formule proposée contient $\frac{x}{2} - 2$ au lieu de $\frac{x}{3} - 2$: fausse telle qu'écrite.
- **D. FAUX** – L'écart requis est $\frac{x}{6-\frac{x}{\frac{x}{3}-2}} - (\frac{x}{3} - 4)$. L'expression proposée utilise $\frac{x}{2} - 2$ dans le dénominateur et retranche $\frac{x}{3} - 4$: fausse.

Question 4

Un détournement de fonds a été réalisé par un ou plusieurs membres du personnel d'une entreprise. Le commissaire chargé de l'enquête est confronté aux problèmes suivants :

- rien ne permet de distinguer les coupables des innocents ;

- les coupables mentent systématiquement à toutes les questions qu'on leur pose, alors que les innocents disent toujours la vérité.

Le commissaire interroge un groupe de trois personnes : X, Y et Z qui connaissent les coupables et déclarent :

- X : « Aucun de nous n'est innocent. »
- Y : « Je suis innocent. »
- Z : « Au moins deux d'entre nous sont des coupables. »

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Y dit la vérité.		✓
B. Il y a 2 innocents.		✓
C. Z ment.		✓
D. X et Y sont coupables.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – X ne peut être innocent (il affirmerait vrai que tous sont coupables, lui compris) : X est coupable et son affirmation est fausse, donc il y a au moins un innocent. Si Z était coupable, « au moins deux coupables » serait faux alors que X et Z le seraient : contradiction. Donc Z est innocent et dit vrai : au moins deux coupables, d'où Y coupable. Y ment en se disant innocent.
- **B. FAUX** – Il y a exactement un innocent (Z) et deux coupables (X, Y).
- **C. FAUX** – Z est innocent et dit la vérité : X et Y sont bien deux coupables.
- **D. VRAI** – X est coupable (son affirmation est auto-contradictoire s'il était innocent) et Y est coupable car Z, innocent, affirme qu'il y a au moins deux coupables.

Question 5

Jean et Mathieu effectuent un stage d'été de 30 jours ouvrables dans la même entreprise. Chacun doit classer N dossiers sur cette période.

- Jean débute le classement dès le premier jour et programme de classer a dossiers par jour.
- Mathieu déclare : « Je commencerai le classement quand après-demain sera hier. Les 9 premiers jours, je classerai b dossiers par jour puis je doublerai ma cadence journalière tous les 9 jours. »

Jean et Mathieu terminent leur classement le dernier jour de leur stage.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $a = 2 \times b$		✓
B. Si $N = 1\,260$ alors b est égal à 22.		✓
C. Si $b = 40$ alors a est égal à 84	✓	
D. Mathieu a réalisé le classement en exactement 28 jours		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – « Après-demain sera hier » dans 3 jours : Mathieu commence le jour 4 et travaille 27 jours, soit 3 périodes de 9 jours à $b, 2b, 4b$ dossiers/jour : $N = 9b + 18b + 36b = 63b$. Jean : $N = 30a$.
Donc $a = \frac{63}{30}b = 2,1b \neq 2b$.

- **B. FAUX** – $N = 1260 \Rightarrow b = 1260/63 = 20$, pas 22.
- **C. VRAI** – $b = 40 \Rightarrow N = 2520 \Rightarrow a = 2520/30 = 84$.
- **D. FAUX** – Mathieu classe du jour 4 au jour 30 inclus, soit 27 jours, pas 28.

Question 6

Dans une école de commerce, la promotion de première année comprend 200 étudiants qui doivent pratiquer au moins l'une des trois langues suivantes : anglais, allemand, espagnol. On sait que :

- 160 étudiants pratiquent l'anglais
- 120 étudiants pratiquent l'espagnol
- 60 étudiants pratiquent l'allemand.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si 30 étudiants pratiquent les 3 langues alors 80 étudiants pratiquent exactement 2 langues.	✓	
B. Si 60 étudiants pratiquent seulement une langue alors aucun étudiant pratique les 3 langues.	✓	
C. Le nombre d'étudiants pratiquant une seule langue est inférieur ou égal à 130.	✓	
D. Plus de 180 étudiants pratiquent au moins l'une des deux langues : allemand ou espagnol.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Soit n_1, n_2, n_3 les effectifs à exactement 1, 2, 3 langues : $n_1 + n_2 + n_3 = 200$ et $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 160 + 120 + 60 = 340$, donc $n_2 + 2n_3 = 140$. Avec $n_3 = 30$: $n_2 = 80$.
- **B. VRAI** – $n_1 = 60 \Rightarrow n_2 + n_3 = 140$ et $n_2 + 2n_3 = 140 \Rightarrow n_3 = 0$.
- **C. VRAI** – $n_1 = 200 - n_2 - n_3 = 60 + n_3$ et $n_3 \leq 60$ (effectif de l'allemand), donc $n_1 \leq 120 \leq 130$.
- **D. FAUX** – $|\text{All} \cup \text{Esp}| \leq 60 + 120 = 180$: il est impossible que plus de 180 étudiants pratiquent l'allemand ou l'espagnol.

Raisonnement mathématique

Question 7

La fonction $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$. $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f(x) = ax + \frac{b}{x-2}$ avec $a = 1$ et $b = 1 \forall x \neq 2$.	✓	
B. $\mathcal{C}_f$ a une asymptote verticale $x = 2$.	✓	
C. La droite d'équation $y = x$ est asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.	✓	
D. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ lorsque $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$, donc $f(x) = x + \frac{1}{x-2} : a = 1, b = 1$.
- **B. VRAI** – Le dénominateur s'annule en 2 et le numérateur vaut 1 : $|f(x)| \rightarrow +\infty$ en 2, asymptote verticale $x = 2$.
- **C. VRAI** – $f(x) - x = \frac{1}{x-2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty : y = x$ est asymptote oblique.
- **D. FAUX** – $f(x) - x = \frac{1}{x-2}$ est négatif pour $x < 2$: la courbe est au-dessous de la droite sur $] -\infty; 2[$.

Question 8

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x} = \frac{x^2}{e^{x \ln 2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $h(x) = \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f'(x) = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$.	✓	
B. Sur $[0; +\infty[$, f a un minimum m lorsque $x = \frac{2}{\ln 2}$.		✓
C. $h'(x) = -x^2 e^{-x \ln 2}$.	✓	
D. Une primitive de f est F définie par : $F(x) = -h(x)$.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – $f(x) = x^2 e^{-x \ln 2}$, $f'(x) = (2x - x^2 \ln 2) e^{-x \ln 2} = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$.
- **B. FAUX** – Sur $[0; +\infty[$, $f' \geq 0$ sur $[0; 2/\ln 2]$ puis $f' \leq 0$: $x = 2/\ln 2$ est un maximum, pas un minimum (le minimum est en 0, $f(0) = 0$).
- **C. VRAI** – $h'(x) = \left[\frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} \right] 2^{-x} - \ln 2 \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x} = -x^2 2^{-x} = -x^2 e^{-x \ln 2}$.
- **D. VRAI** – $(-h)'(x) = x^2 2^{-x} = f(x)$, donc $F = -h$ est une primitive de f .

Question 9

Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{a}{e^{bx} + 1}$ où a et b sont des réels.

Soient A(0; 6) et B(4; 0) deux points.

La droite (AB) est tangente à la courbe au point A.

Soit $f(x) = e^{bx} - 1$ pour tout réel x dans $[0; +\infty[$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $g(0) = 6$ et $g'(0) = -\frac{3}{2}$.	✓	
B. $g'(x) = \frac{a}{(e^{bx} + 1)^2}$.		✓
C. Nous avons $a = 12$ et $b = \frac{1}{2}$.	✓	
D. La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[0; +\infty[$ est $x = \frac{\ln(a+1)}{2b}$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – A est sur la courbe : $g(0) = 6$. La tangente en A est (AB) de pente $\frac{0-6}{4-0} = -\frac{3}{2}$, donc $g'(0) = -\frac{3}{2}$.
- B. **FAUX** – $g'(x) = -\frac{ab e^{bx}}{(e^{bx} + 1)^2}$, pas $\frac{a}{(e^{bx} + 1)^2}$.
- C. **VRAI** – $g(0) = a/2 = 6 \Rightarrow a = 12$; $g'(0) = -ab/4 = -3b = -3/2 \Rightarrow b = 1/2$.
- D. **VRAI** – $e^{bx} - 1 = \frac{a}{e^{bx} + 1} \iff e^{2bx} - 1 = a \iff e^{2bx} = a + 1 \iff x = \frac{\ln(a+1)}{2b}$, positif pour $a = 12, b = 1/2$.

Question 10

Pour un prix de vente unitaire x , exprimé en centaines d'euros, $f(x)$ est le nombre d'objets, exprimés en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre d'objets, exprimés en centaines que les consommateurs sont prêts à acheter.

La fonction f est la fonction d'Offre : $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$.

La fonction g est la fonction de Demande : $g(x) = \frac{12}{e^{\frac{1}{2}x} + 1}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le prix d'équilibre (prix auquel la demande est égale à l'offre) est $p = \ln 13$ centaines d'euros.	✓	
B. Si $n = f(p)$ avec $p =$ prix d'équilibre, $n = \sqrt{13} - 1$.	✓	
C. $\int_0^{\ln 13} (e^{\frac{1}{2}x} - 1) dx = 2\sqrt{13} - \ln(13) - 2$.	✓	
D. Soit $R = np - \int_0^p (e^{\frac{1}{2}x} - 1) dx$, la rente du producteur. Alors $R = \sqrt{13} \ln(13) - 2\sqrt{13} + 2$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – $e^{x/2} - 1 = \frac{12}{e^{x/2} + 1} \iff e^x - 1 = 12 \iff x = \ln 13$.
- B. **VRAI** – $n = f(\ln 13) = e^{\ln 13/2} - 1 = \sqrt{13} - 1$.
- C. **VRAI** – $\int_0^{\ln 13} (e^{x/2} - 1) dx = [2e^{x/2} - x]_0^{\ln 13} = 2\sqrt{13} - \ln 13 - 2$.
- D. **VRAI** – $R = (\sqrt{13} - 1) \ln 13 - (2\sqrt{13} - \ln 13 - 2) = \sqrt{13} \ln 13 - 2\sqrt{13} + 2$.

Question 11

Une entreprise embauche des cadres ingénieurs, les uns sous contrat A travaillant 35 heures et payés 550 euros par semaine, les autres sous contrat B travaillant 20 heures et payés 220 euros par semaine. Le chef d'entreprise peut embaucher au plus 8 personnes sous contrat A et 15 personnes sous contrat B.

Chaque semaine, il dispose d'un budget de 5 060 euros et 370 heures de travail au moins, doivent être effectuées.

Pour satisfaire ses besoins, l'entreprise ne peut pas embaucher :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 7 personnes en contrat A et 7 personnes en contrat B.	✓	
B. 4 personnes en contrat A et 12 personnes en contrat B.		✓
C. 2 personnes en contrat A et 14 personnes en contrat B.	✓	
D. 6 personnes en contrat A et 8 personnes en contrat B.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Coût $7 \times 550 + 7 \times 220 = 5390 > 5060$ € : budget dépassé, embauche impossible.
- **B. FAUX** – Coût $2200 + 2640 = 4840 \leq 5060$, heures $140 + 240 = 380 \geq 370$, effectifs $4 \leq 8, 12 \leq 15$: embauche possible, l'affirmation « ne peut pas » est fausse.
- **C. VRAI** – Heures $2 \times 35 + 14 \times 20 = 350 < 370$: contrainte horaire non satisfaite, embauche impossible.
- **D. FAUX** – Coût $3300 + 1760 = 5060$ (budget exactement atteint), heures $210 + 160 = 370$ (minimum atteint) : embauche possible, l'affirmation est fausse.

Question 12

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f(2x) = f(2) + f(x)$.	✓	
B. $f(2^n) = n f(2)$.	✓	
C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{\ln 10}$.	✓	
D. $f^{-1}(y) = 10^y$ définie sur $\mathbb{R}$ est la réciproque de f .	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – $f = \log_{10} : f(2x) = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 10} = f(2) + f(x)$.
- **B. VRAI** – $f(2^n) = \frac{n \ln 2}{\ln 10} = n f(2)$.
- **C. VRAI** – $f(1/2) = \frac{-\ln 2}{\ln 10}$.
- **D. VRAI** – f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$; $y = \frac{\ln x}{\ln 10} \iff x = e^{y \ln 10} = 10^y$, donc $f^{-1}(y) = 10^y$ sur $\mathbb{R}$.

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

On dispose d'une machine M_1 depuis déjà un certain temps et on anticipe qu'elle puisse être en panne au cours des prochains mois.

L'entreprise peut acheter le modèle M_2 dès maintenant ou acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois.

On sait que le modèle M_1 va certainement résister pendant encore au moins 2 autres mois mais qu'il y a des chances égales qu'il s'arrête au cours du 3^e, 4^e, 5^e ou 6^e mois; et qu'il y a aussi une probabilité égale à 0,40 qu'il fonctionnera correctement jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

S'il s'arrête avant l'arrivée du modèle M_3 , on estime qu'il serait illogique d'acheter le modèle M_2 plus tard et qu'il serait alors plus sage de louer une autre machine à un coût égal à 500 € par mois jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

Si on achète le modèle M_2 maintenant, on va le payer 14 000 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 66 mois mais si nous attendons l'arrivée du modèle M_3 , nous allons le payer 12 900 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 60 mois.

Ces machines, compte tenu de leurs capacités respectives, généreront des revenus de 2 € par unité fabriquée. Le modèle M_1 permet de fabriquer 200 unités par mois, une machine louée pourrait fabriquer 220 unités par mois, les modèles M_2 et M_3 pourront fabriquer 250 unités par mois.

Question 13

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 ne tombe pas en panne dans cette période, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 19 500 €.	✓	
B. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 tombe en panne à la fin du 2 ^e mois, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 17 660 €.	✓	
C. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 tombe en panne à la fin du 3 ^e mois, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 18 120 €.	✓	
D. Si on décide d'acheter le modèle M_2 dès maintenant le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 19 000 €.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – M_1 pendant 6 mois : $6 \times 200 \times 2 = 2400$ €. M_3 sur 60 mois : $60 \times 250 \times 2 - 12900 = 17100$ €. Total 19500 €.
- **B. VRAI** – Mois 1-2 avec M_1 : 800 €; mois 3-6 en location : $4 \times (220 \times 2 - 500) = -240$ €; puis M_3 : 17100 €. Total $800 - 240 + 17100 = 17660$ €.
- **C. VRAI** – Mois 1-3 : 1200 €; 3 mois de location : $3 \times (220 \times 2 - 500) = -180$ €; M_3 : 17100 €. Total 18120 €.
- **D. VRAI** – M_2 sur 66 mois : $66 \times 250 \times 2 - 14000 = 33000 - 14000 = 19000$ €.

Question 14

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 30 mois après l'achat du modèle M_3 , la somme restante à amortir est égale à 6 450 €.	✓	
B. 33 mois après l'achat du modèle M_2 , la somme restante à amortir est strictement supérieure à 7 000 €.		✓
C. x mois après l'achat du modèle M_2 , la somme restante à amortir est égale à $14\,000(1 - x/66)$ €.	✓	
D. y mois après l'achat du modèle M_3 , la somme restante à amortir est égale à $12\,900(1 - y/60)$ €.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Amortissement M_3 : $12\,900/60 = 215$ €/mois ; après 30 mois il reste $12\,900 - 30 \times 215 = 6\,450$ €.
- **B. FAUX** – Après 33 mois (la moitié de 66), il reste $14\,000 \times (1 - 33/66) = 7\,000$ € exactement, pas strictement plus.
- **C. VRAI** – Amortissement linéaire sur 66 mois : reste $14\,000 - \frac{14\,000}{66}x = 14\,000(1 - x/66)$.
- **D. VRAI** – Amortissement linéaire sur 60 mois : reste $12\,900(1 - y/60)$.

Question 15

Soit une expérience aléatoire produisant n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ pouvant conduire respectivement aux bénéfices : $x_1, x_2, \dots, x_n$ (nombres réels) avec les probabilités respectives : $p_1, p_2, \dots, p_n$ (avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$).

On appelle bénéfice espéré associé à une telle expérience la quantité réelle : $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$.

On décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Les valeurs possibles du bénéfice (notées x_i) sont au nombre de 5.	✓	
B. Les valeurs x_i varient entre 17 660 et 19 500 €.	✓	
C. La probabilité p_i associée à la plus petite valeur x_i est 0,20.		✓
D. Le bénéfice espéré est égal à 18 580 €.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Cinq issues : M_1 tient 6 mois (19500 €) ou s'arrête au cours du 3e, 4e, 5e ou 6e mois (17660, 18120, 18580, 19040 €). Cinq valeurs distinctes.
- **B. VRAI** – La plus petite valeur est 17660 € (panne au cours du 3e mois, 4 mois de location) et la plus grande 19500 € (pas de panne).
- **C. FAUX** – Les 4 mois de panne sont équiprobables et de probabilité totale $1 - 0,40 = 0,60$: chacun 0,15, pas 0,20.
- **D. FAUX** – Espérance : $0,4 \times 19\,500 + 0,15 \times (17\,660 + 18\,120 + 18\,580 + 19\,040) = 7\,800 + 11\,010 = 18\,810$ €, pas 18580 (qui est seulement la valeur d'une panne au cours du 5e mois).

Question 16

Un expert mécanicien jouissant d'une bonne expérience peut prédire avec un taux de réussite de 85 % si la machine va résister pour les 6 prochains mois et avec le même taux de réussite de 85 % si la machine tombera en panne. Mais il est incapable de prédire à quel moment elle tombera en panne si elle tombe en panne.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité que l'expert prédise que le modèle M_1 tombe en panne est 0,57.	✓	
B. Si la machine ne tombe pas en panne, la probabilité que l'expert prédise qu'elle tombera en panne est 0,15.	✓	
C. Sachant que l'expert affirme que la machine ne tombera en panne, la probabilité qu'elle ne tombe pas en panne est supérieure à 0,6.	✓	
D. La probabilité que le modèle M_1 tombe en panne au cours du 3 ^e mois est 0,30.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $P(\text{prédit panne}) = 0,6 \times 0,85 + 0,4 \times 0,15 = 0,51 + 0,06 = 0,57$.
- **B. VRAI** – Si la machine ne tombe pas en panne, l'expert se trompe avec probabilité $1 - 0,85 = 0,15$.
- **C. VRAI** – $P(\overline{\text{panne}} \mid \text{prédit non-panne}) = \frac{0,4 \times 0,85}{0,34 + 0,6 \times 0,15} = \frac{0,34}{0,43} \approx 0,79 > 0,6$.
- **D. FAUX** – $P(\text{panne au 3e mois}) = 0,60/4 = 0,15$, pas 0,30.

Question 17

La production mensuelle q d'un autre produit fabriqué par l'entreprise est lié à son prix de vente p (exprimé en €) par la relation : $q - M + 2p = 0$, où M est un paramètre entier positif.

La fonction coût moyen mensuel notée $C(q)$ dépend de la production mensuelle q avec :

$$C(q) = q^2 - 8q + 57 + \frac{2}{q}.$$

On note $R(q)$ la recette totale mensuelle en fonction de q .

On note $G(q)$ le profit mensuel en fonction de q , égal à la différence entre recette totale mensuelle et le coût total mensuel.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La recette totale mensuelle s'écrit : $R(q) = \frac{q}{2}M - \frac{q^2}{2}$.	✓	
B. La recette totale mensuelle est maximale pour un volume de production de M unités.		✓
C. Le coût total mensuel est $q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.	✓	
D. Le profit mensuel s'écrit $G(q) = -q^3 + \frac{15q^2}{2} + (M - 57)q - 2$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $q - M + 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{M - q}{2}$, $R(q) = pq = \frac{q}{2}M - \frac{q^2}{2}$.

- **B. FAUX** – $R'(q) = \frac{M}{2} - q$ s'annule en $q = \frac{M}{2}$: le maximum est atteint pour $M/2$ unités, pas M (où $R(M) = 0$).
- **C. VRAI** – Coût total $= qC(q) = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.
- **D. FAUX** – $G(q) = R(q) - qC(q) = -q^3 + \left(8 - \frac{1}{2}\right)q^2 + \left(\frac{M}{2} - 57\right)q - 2$: le coefficient de q est $\frac{M}{2} - 57$, pas $M - 57$.

Question 18

L'entreprise qui utilise les machines précédentes envisage aussi de confier à l'une de ses unités de production, à l'étranger, l'élaboration des produits A et des produits B demandés par certains industriels.

Cette fabrication doit répondre aux contraintes mensuelles de fabrication minimale de 4 000 produits A et de 5 000 produits B. La matière première sera livrée par l'usine principale à l'unité de production qui traite un minimum de 36 000 kg de matière. En ce qui concerne la main-d'œuvre le maximum sera fixé à 20 000 heures.

Par ailleurs on dispose des informations suivantes :

	Produit A	Produit B
La matière première par produit	6 kg	9 kg
La main d'œuvre par produit	2 heures	1 heure
Poids du produit fini	3 kg	4 kg

Le coût des transports mis en place entre l'unité de production et l'unité principale pour l'acheminement des matières premières et le retour des produits finis devra être rendu minimal.

Le prix de ce transport a été estimé à 4 € par kilogramme de matière ou de produit fini transporté.

On note x et y respectivement le nombre de produits A et le nombre de produits B à fabriquer.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $4\,000 - \frac{2}{3}x \leq y \leq 20\,000$.	✓	
B. Le coût total des transports est égal à : $36x + 52y$.	✓	
C. En tenant compte de toutes les contraintes, il est possible de produire 7 000 unités de A et 7 000 unités de B.		✓
D. La production qui rend minimal le coût total des transports et qui tient compte de toutes les contraintes est celle qui consiste à produire 5 000 unités de A et 6 000 unités de B.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Matière : $6x + 9y \geq 36\,000 \iff y \geq 4\,000 - \frac{2}{3}x$. Main-d'œuvre : $2x + y \leq 20\,000$, donc $y \leq 20\,000 - 2x \leq 20\,000$. Les deux inégalités sont des conséquences (non optimales mais vraies) des contraintes.
- **B. VRAI** – Kilogrammes transportés : matière $6x + 9y$ plus produits finis $3x + 4y$, soit $9x + 13y$; à 4 €/kg : $36x + 52y$.
- **C. FAUX** – $2 \times 7\,000 + 7\,000 = 21\,000 > 20\,000$ heures : la contrainte de main-d'œuvre est violée.

- D. **FAUX** – Le coût $36x + 52y$ est croissant en x et y ; le point $(4000; 5000)$ satisfait toutes les contraintes ($6 \cdot 4000 + 9 \cdot 5000 = 69000 \geq 36000$, $13000 \leq 20000$) et coûte 404000 €, contre 492000 € pour $(5000; 6000)$. Le minimum est en $(4000; 5000)$.