

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

On dispose d'une machine M_1 depuis déjà un certain temps et on anticipe qu'elle puisse être en panne au cours des prochains mois.

L'entreprise peut acheter le modèle M_2 dès maintenant ou acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois.

On sait que le modèle M_1 va certainement résister pendant encore au moins 2 autres mois mais qu'il y a des chances égales qu'il s'arrête au cours du 3^e, 4^e, 5^e ou 6^e mois; et qu'il y a aussi une probabilité égale à 0,40 qu'il fonctionnera correctement jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

S'il s'arrête avant l'arrivée du modèle M_3 , on estime qu'il serait illogique d'acheter le modèle M_2 plus tard et qu'il serait alors plus sage de louer une autre machine à un coût égal à 500 € par mois jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

Si on achète le modèle M_2 maintenant, on va le payer 14 000 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 66 mois mais si nous attendons l'arrivée du modèle M_3 , nous allons le payer 12 900 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 60 mois.

Ces machines, compte tenu de leurs capacités respectives, généreront des revenus de 2 € par unité fabriquée. Le modèle M_1 permet de fabriquer 200 unités par mois, une machine louée pourrait fabriquer 220 unités par mois, les modèles M_2 et M_3 pourront fabriquer 250 unités par mois.

Question 18

L'entreprise qui utilise les machines précédentes envisage aussi de confier à l'une de ses unités de production, à l'étranger, l'élaboration des produits A et des produits B demandés par certains industriels.

Cette fabrication doit répondre aux contraintes mensuelles de fabrication minimale de 4 000 produits A et de 5 000 produits B. La matière première sera livrée par l'usine principale à l'unité de production qui traite un minimum de 36 000 kg de matière. En ce qui concerne la main-d'œuvre le maximum sera fixé à 20 000 heures.

Par ailleurs on dispose des informations suivantes :

	Produit A	Produit B
La matière première par produit	6 kg	9 kg
La main d'œuvre par produit	2 heures	1 heure
Poids du produit fini	3 kg	4 kg

Le coût des transports mis en place entre l'unité de production et l'unité principale pour l'acheminement des matières premières et le retour des produits finis devra être rendu minimal.

Le prix de ce transport a été estimé à 4 € par kilogramme de matière ou de produit fini transporté.

On note x et y respectivement le nombre de produits A et le nombre de produits B à fabriquer.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $4\,000 - \frac{2}{3}x \leq y \leq 20\,000$.	✓	
B. Le coût total des transports est égal à : $36x + 52y$.	✓	
C. En tenant compte de toutes les contraintes, il est possible de produire 7 000 unités de A et 7 000 unités de B.		✓
D. La production qui rend minimal le coût total des transports et qui tient compte de toutes les contraintes est celle qui consiste à produire 5 000 unités de A et 6 000 unités de B.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – Matière : $6x + 9y \geq 36\,000 \iff y \geq 4\,000 - \frac{2}{3}x$. Main-d'œuvre : $2x + y \leq 20\,000$, donc $y \leq 20\,000 - 2x \leq 20\,000$. Les deux inégalités sont des conséquences (non optimales mais vraies) des contraintes.
- B. **VRAI** – Kilogrammes transportés : matière $6x + 9y$ plus produits finis $3x + 4y$, soit $9x + 13y$; à 4 €/kg : $36x + 52y$.
- C. **FAUX** – $2 \times 7\,000 + 7\,000 = 21\,000 > 20\,000$ heures : la contrainte de main-d'œuvre est violée.
- D. **FAUX** – Le coût $36x + 52y$ est croissant en x et y ; le point $(4\,000; 5\,000)$ satisfait toutes les contraintes ($6 \cdot 4\,000 + 9 \cdot 5\,000 = 69\,000 \geq 36\,000$, $13\,000 \leq 20\,000$) et coûte 404 000 €, contre 492 000 € pour $(5\,000; 6\,000)$. Le minimum est en $(4\,000; 5\,000)$.