

## Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

On dispose d'une machine  $M_1$  depuis déjà un certain temps et on anticipe qu'elle puisse être en panne au cours des prochains mois.

L'entreprise peut acheter le modèle  $M_2$  dès maintenant ou acheter le modèle  $M_3$  qui sortira dans 6 mois.

On sait que le modèle  $M_1$  va certainement résister pendant encore au moins 2 autres mois mais qu'il y a des chances égales qu'il s'arrête au cours du 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> ou 6<sup>e</sup> mois; et qu'il y a aussi une probabilité égale à 0,40 qu'il fonctionnera correctement jusqu'à l'arrivée du modèle  $M_3$ .

S'il s'arrête avant l'arrivée du modèle  $M_3$ , on estime qu'il serait illogique d'acheter le modèle  $M_2$  plus tard et qu'il serait alors plus sage de louer une autre machine à un coût égal à 500 € par mois jusqu'à l'arrivée du modèle  $M_3$ .

Si on achète le modèle  $M_2$  maintenant, on va le payer 14 000 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 66 mois mais si nous attendons l'arrivée du modèle  $M_3$ , nous allons le payer 12 900 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 60 mois.

Ces machines, compte tenu de leurs capacités respectives, généreront des revenus de 2 € par unité fabriquée. Le modèle  $M_1$  permet de fabriquer 200 unités par mois, une machine louée pourrait fabriquer 220 unités par mois, les modèles  $M_2$  et  $M_3$  pourront fabriquer 250 unités par mois.

### Question 17

La production mensuelle  $q$  d'un autre produit fabriqué par l'entreprise est lié à son prix de vente  $p$  (exprimé en €) par la relation :  $q - M + 2p = 0$ , où  $M$  est un paramètre entier positif.

La fonction coût moyen mensuel notée  $C(q)$  dépend de la production mensuelle  $q$  avec :

$$C(q) = q^2 - 8q + 57 + \frac{2}{q}.$$

On note  $R(q)$  la recette totale mensuelle en fonction de  $q$ .

On note  $G(q)$  le profit mensuel en fonction de  $q$ , égal à la différence entre recette totale mensuelle et le coût total mensuel.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

| Affirmation                                                                             | VRAI | FAUX |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------|------|
| A. La recette totale mensuelle s'écrit : $R(q) = \frac{q}{2}M - \frac{q^2}{2}$ .        | ✓    |      |
| B. La recette totale mensuelle est maximale pour un volume de production de $M$ unités. |      | ✓    |
| C. Le coût total mensuel est $q^3 - 8q^2 + 57q + 2$ .                                   | ✓    |      |
| D. Le profit mensuel s'écrit $G(q) = -q^3 + \frac{15q^2}{2} + (M - 57)q - 2$ .          |      | ✓    |

### Corrigé

– A. **VRAI** –  $q - M + 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{M - q}{2}$ ,  $R(q) = pq = \frac{q}{2}M - \frac{q^2}{2}$ .

- **B. FAUX** –  $R'(q) = \frac{M}{2} - q$  s'annule en  $q = \frac{M}{2}$  : le maximum est atteint pour  $M/2$  unités, pas  $M$  (où  $R(M) = 0$ ).
- **C. VRAI** – Coût total  $= q C(q) = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$ .
- **D. FAUX** –  $G(q) = R(q) - qC(q) = -q^3 + \left(8 - \frac{1}{2}\right)q^2 + \left(\frac{M}{2} - 57\right)q - 2$  : le coefficient de  $q$  est  $\frac{M}{2} - 57$ , pas  $M - 57$ .