

Raisonnement mathématique

Question 8

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x} = \frac{x^2}{e^{x \ln 2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $h(x) = \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f'(x) = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$.	✓	
B. Sur $[0; +\infty[$, f a un minimum m lorsque $x = \frac{2}{\ln 2}$.		✓
C. $h'(x) = -x^2 e^{-x \ln 2}$.	✓	
D. Une primitive de f est F définie par : $F(x) = -h(x)$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – $f(x) = x^2 e^{-x \ln 2}$, $f'(x) = (2x - x^2 \ln 2) e^{-x \ln 2} = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$.
- B. **FAUX** – Sur $[0; +\infty[$, $f' \geq 0$ sur $[0; 2/\ln 2]$ puis $f' \leq 0$: $x = 2/\ln 2$ est un maximum, pas un minimum (le minimum est en 0, $f(0) = 0$).
- C. **VRAI** – $h'(x) = \left[\frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} \right] 2^{-x} - \ln 2 \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x} = -x^2 2^{-x} = -x^2 e^{-x \ln 2}$.
- D. **VRAI** – $(-h)'(x) = x^2 2^{-x} = f(x)$, donc $F = -h$ est une primitive de f .