

Raisonnement logique

Question 2

Une société de location propose à une entreprise de travaux publics trois types de contrats pour la location d'un engin. Ces contrats sont valables à partir du 1^{er} janvier 2012 :

- Contrat n° 1 : le montant mensuel de la location est de 2 000 € et ce montant mensuel augmentera de $\alpha = 10\%$ chaque année au 1^{er} janvier (la première augmentation ayant donc lieu le 1^{er} janvier 2013).
- Contrat n° 2 : le montant annuel de la location est de $a = 41\,000$ € pour 2012 et il augmente de $b = 4\,000$ € chaque année, dès le 1^{er} janvier 2013.
- Contrat n° 3 : le montant mensuel de la location est de 3 000 € pour janvier 2012 et il augmente de $\beta = 2\%$ les 1^{er} janvier et 1^{er} juillet de chaque année et ce dès le 1^{er} juillet 2012.

La société de location précise d'autre part à l'entreprise que la location de l'engin est valable pour des années complètes d'utilisation et que le montant total dû pour l'année est payable en début d'année.

Soit n le nombre d'années de location.

On désigne par u_n , v_n et w_n respectivement le montant annuel de la location (en euros) pour les contrats n° 1, n° 2 et n° 3.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $u_n = u_1(1 + \alpha)^{n-1}$	✓	
B. $w_n = w_1(1 + \beta)^{2n-2}$	✓	
C. $v_n = a + (n - 1)b$	✓	
D. Le montant annuel de la location avec le contrat n° 1 atteint le montant annuel de la location avec le contrat n° 3 pour $n = \frac{\ln w_1 - \ln u_1}{\ln(1 + \alpha) - 2 \ln(1 + \beta)}$.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – Le montant annuel du contrat 1 vaut $u_1 = 12 \times 2000 = 24\,000$ € et est multiplié par $1 + \alpha = 1,1$ chaque année : suite géométrique, $u_n = u_1(1 + \alpha)^{n-1}$.
- B. **VRAI** – Le loyer mensuel est multiplié par $1 + \beta$ deux fois par an ; l'année n commence avec un mensuel égal à $3000(1 + \beta)^{2(n-1)}$ et le montant annuel $w_n = 6 \cdot 3000(1 + \beta)^{2n-2}(1 + (1 + \beta)) = w_1(1 + \beta)^{2n-2}$ avec $w_1 = 36\,360$ €.
- C. **VRAI** – Le contrat 2 est une suite arithmétique de premier terme a et de raison b : $v_n = a + (n-1)b$.
- D. **FAUX** – $u_n = w_n \iff (n-1)[\ln(1 + \alpha) - 2 \ln(1 + \beta)] = \ln w_1 - \ln u_1$, soit $n = 1 + \frac{\ln w_1 - \ln u_1}{\ln(1 + \alpha) - 2 \ln(1 + \beta)}$. Il manque le « 1 + » dans la formule proposée.