

Session du 2012 – 18 questions, 4 affirmations à qualifier VRAI ou FAUX par question. Calculatrice de la plateforme uniquement.

Raisonnement logique

Question 1

Un voyageur devant effectuer un voyage se renseigne sur les tarifs des trains et sur ceux d'un loueur de voitures. Le train coûte b € par kilomètre parcouru. Pour la voiture, il faut débours c € plus a € par kilomètre. b est strictement supérieur à a .

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si $a = 0,1$; $b = 0,2$ et $c = 60$, la voiture devient rentable dès que le trajet dépasse 600 km.	☐	☐
B. Les deux moyens de transport sont au même coût si le trajet est de $\frac{c}{a-b}$ km.	☐	☐
C. Si a , b et c augmentaient tous de 10 %, le trajet à effectuer pour avoir un coût identique serait supérieur.	☐	☐
D. Si b seul augmentait de 10 %, le trajet à effectuer pour avoir un coût identique deviendrait moins long de $\frac{0,1bc}{a^2 - 2,1ab + 1,1b^2}$ km.	☐	☐

Question 2

Trois enfants, Axel, Brigitte et Claude, possèdent 60 véhicules miniatures (voitures, camions et avions). Nous avons pu recueillir les informations suivantes :

- 2/3 des véhicules sont des voitures ;
- Le nombre de camions est 50 % supérieur au nombre d'avions ;
- Brigitte et Claude ont 42 véhicules ;
- Axel et Claude possèdent 50 % des camions ;
- Axel a 3 voitures de plus que Brigitte et 2 de plus que Claude ;
- Brigitte a un avion de moins que de camions ;
- Un des trois n'a pas d'avion ;
- Ils ont tous des camions.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Brigitte a le plus de véhicules.	☐	☐
B. Claude a 20 % des camions.	☐	☐
C. Claude n'a pas d'avion.	☐	☐
D. Axel a 3 camions.	☐	☐

Question 3

Il existe différentes échelles de température. Nous utilisons par exemple les degrés Celsius. Les Américains utilisent les degrés Fahrenheit. Les degrés Réaumur étaient utilisés en France avant 1800. Ces trois échelles sont linéaires. Voici quelques équivalents de température :

- Fusion de l'eau : 0°C ou 32°F ou 0°R ;
- Vaporisation de l'eau : 100°C ou 212°F ou 80°R

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Une température de 15°C est équivalente à 59°F et 10°R .	☐	☐
B. La température du soleil, qui est de $4\,420^{\circ}\text{R}$, est supérieure à 6000°C .	☐	☐
C. La température la plus basse enregistrée sur la terre, qui était de -130°F , équivaut à -50°R .	☐	☐
D. On peut transformer une température Fahrenheit t_F en température Celsius t_C en utilisant la formule suivante : $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$.	☐	☐

Question 4

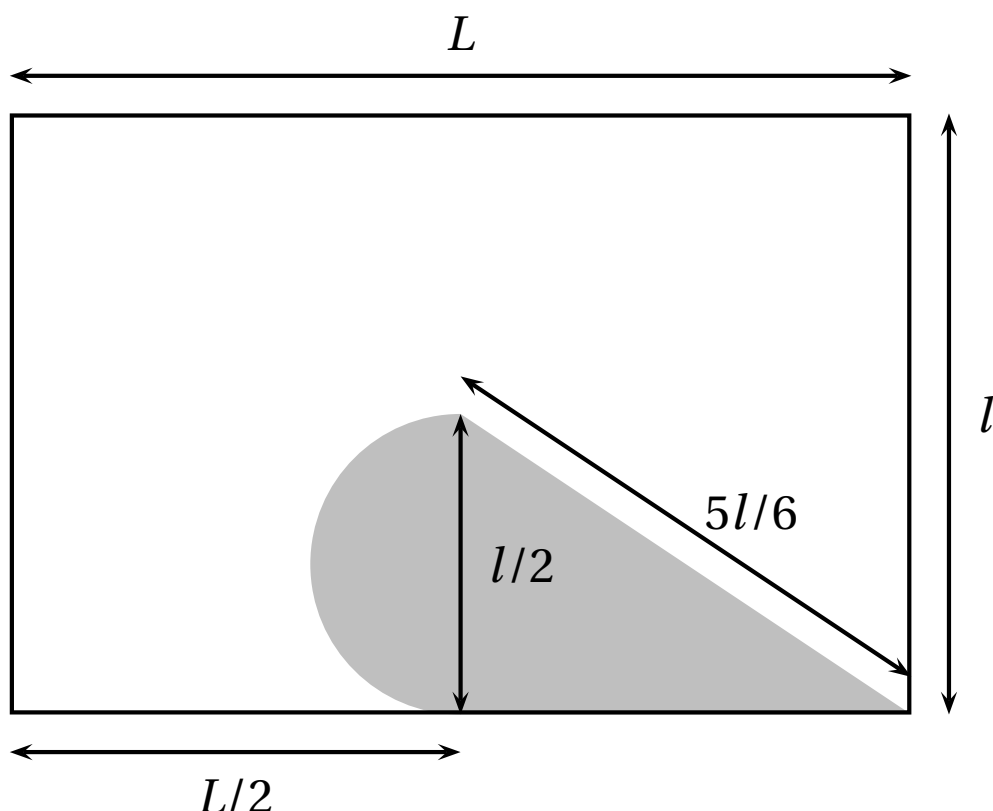
Trois femmes (Dorothée, Béatrice et Emilie) et deux hommes (Albert et Christophe) subissent des tests de mémorisation. À l'issue de ces tests, on a évalué leurs performances individuelles. Albert a réussi 2 fois plus que Béatrice. Béatrice a réussi sept fois moins que Christophe. Christophe a réussi six fois de plus que Dorothée. Dorothée a réussi 3 fois de plus qu'Emilie. Béatrice et Dorothée ont réussi ensemble 10 fois.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Béatrice a réussi 3 fois.	☐	☐
B. Sur les 5 participants, Christophe est celui qui a le mieux réussi.	☐	☐
C. Parmi les femmes, c'est Dorothée qui a le mieux réussi.	☐	☐
D. En moyenne, les femmes ont mieux réussi que les hommes.	☐	☐

Question 5

Dans un terrain rectangulaire, se trouve un jardin botanique (dont la surface est grisée). Les dimensions des différents composants sont portées sur le graphique ci-dessous :



À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La largeur du terrain rectangulaire l est égale à $\frac{2}{3} \times L$	☐	☐
B. La surface du jardin botanique est inférieure au quart de la surface totale du terrain rectangulaire.	☐	☐
C. Si la largeur l du terrain rectangulaire est égale à 120 m, sa surface sera égale à 19 200 m ² .	☐	☐
D. La surface du jardin botanique est égale à $\frac{1}{8} \times \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) \times l^2$.	☐	☐

Question 6

Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :

- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile;
- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse;
- Yvette est enfant unique;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de soeur;
- Zoé est la soeur d'Urbain et est plus âgée que lui;
- Arthur n'a pas eu de fille;

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Cécile est la mère d'Yvette.	☐	☐
B. Walter et Urbain sont frères.	☐	☐
C. Bernard a plus de fils qu'Arthur.	☐	☐
D. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard.	☐	☐

Raisonnement mathématique

Question 7

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$. On note Δ l'ensemble de définition de f .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $\Delta =] - \infty ; -3[$.	☐	☐
B. f est dérivable sur l'ensemble de définition Δ .	☐	☐
C. Pour tout $x \in \Delta$, $f'(x) = \frac{7e^x}{(1 - 3e^x)^2}$.	☐	☐
D. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la représentation graphique de la fonction f si x tend vers $-\infty$.	☐	☐

Question 8

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.	☐	☐
B. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f , au point de coordonnées $(\frac{1}{e} ; 1)$ s'écrit $y = -ex + e + 1$.	☐	☐
C. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{e}[$, la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$.	☐	☐
D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.	☐	☐

Question 9

On considère l'équation définie dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3mx + m^2 = 0$ où m est un paramètre réel. On pose $u = x + \frac{m}{x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet la racine double $x = 0$ et les 2 racines $x = 1$ et $x = 2$.	☐	☐
B. Pour $m \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a le même ensemble de racines que : $u^2 - 3u - 2(m - 1) = 0$.	☐	☐
C. Pour $m = 1$, l'équation $f(x) = 0$ admet les deux racines $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.	☐	☐
D. Pour $m = 3$, $f(x)$ s'écrit : $f(x) = (x^2 + x + 3)(x - 1)(x - 3)$.	☐	☐

Question 10

Soit a, b, c trois réels avec a non nul et f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la courbe représentative est une parabole $\mathcal{P}$. On suppose que $\mathcal{P}$ passe par le point A de coordonnées $(1 ; -1)$ et admet en ce point une tangente de pente -1 .

Affirmation	VRAI	FAUX
A. On a $f'(-1) = -1$, où $f'(-1)$ désigne le nombre dérivé en -1 .	☐	☐
B. L'expression $x^2 - 3x + 1$ est une solution de $f(x)$.	☐	☐
C. De l'énoncé, on a toujours $\begin{cases} a - b + c = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$.	☐	☐
D. Il existe une unique fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé	☐	☐

Question 11

Soit f la fonction définie sur $]5 ; +\infty[$, par $f(x) = -3x + 1 - \frac{8}{x-5}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f(x) = \frac{3x^2 - 16x + 13}{5 - x}$.	☐	☐
B. $f'(x) = -3 - \frac{8}{(x-5)^2}$.	☐	☐
C. La droite d'équation $y = -3x + 1$ est asymptote à la courbe (C) .	☐	☐
D. Une primitive de f est : $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x - 8 \ln(x-5)$.	☐	☐

Question 12

L'éclairage avant d'une voiture nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note A l'évènement « la première lampe est défectueuse » et B l'évènement « la deuxième lampe est défectueuse ». Des essais ont montré que

$P(A) = 0,12$; $P(B) = 0,18$ et $P(A \cap B) = 0,07$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Les évènements A et B sont indépendants.	☐	☐
B. La probabilité de l'évènement « au moins une des deux lampes est défectueuse » est $0,23$.	☐	☐
C. La probabilité de l'évènement « les deux lampes fonctionnent » est $0,77$.	☐	☐
D. La probabilité de l'évènement « la première lampe fonctionne et la deuxième est défectueuse » est $0,11$.	☐	☐

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Un architecte chargé d'établir les plans et d'assurer le suivi de la construction d'un nouvel immeuble, fait appel à vos services en qualité de conseiller technique. Il vous demande de répondre à une série

de questions en faisant appel à vos connaissances dans le domaine des mathématiques et surtout à votre logique.

Les opérations à mener pour construire l'immeuble sont les suivantes :

En premier lieu il convient de faire les fondations. La durée de cette tâche est estimée à 3 semaines.

Le gros œuvre (réalisation des murs extérieurs et des planchers) nécessitera 10 semaines et ne pourra démarrer qu'une fois les fondations terminées).

La réalisation de la toiture, qui ne peut commencer avant la fin du gros oeuvre, durera 3 semaines.

Le temps prévu pour la mise en place des portes et des fenêtres, qui peut débuter dès que le gros oeuvre est terminé, est de 4 semaines.

Il faut attendre que les portes et fenêtres soient posées pour entamer les travaux de peinture extérieure qui dureront 4 semaines.

Dès que la toiture est terminée, l'installation du chauffage, qui nécessite 2 semaines, peut débuter.

Les électriciens demandent 4 semaines pour réaliser leur tâche (installer le circuit électrique) qui peut commencer dès que la toiture est mise en place et que les portes et fenêtres sont posées.

Les travaux de finition intérieure (peinture intérieure, aménagements divers de l'immeuble) requièrent 5 semaines, et peuvent être engagés quand les électriciens et les installateurs du système de chauffage ont terminé leur travail.

Pour pouvoir superviser l'ensemble des travaux, on représente un calendrier où n'apparaît que la numérotation des semaines, le début et la fin de chacune des tâches évoquées ci-dessus, sachant que l'architecte souhaite que l'immeuble soit réalisé dans les plus courts délais.

Une tâche débute toujours en début de semaine et se termine toujours en fin de semaine.

Exemple :

Numéro semaine $\Rightarrow$ $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{\text{Tâche A}}$ $\underbrace{4 \quad 5}_{\text{Tâche B}}$ $\underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{\text{Tâche C}}$

Tâche A Tâche B Tâche C

Tâche D

Lecture du « calendrier » de l'exemple : la tâche A dure 3 semaines. La tâche B dure 2 semaines et ne peut commencer avant la tâche A. La tâche C dure 3 semaines et ne peut commencer avant la tâche B. La tâche D dure 4 semaines et ne peut commencer avant la tâche A.

Remarque : Chaque changement doit être pris en compte indépendamment des autres. Ainsi, par exemple, lorsqu'il s'agit de recalculer la durée totale des travaux sachant que la toiture est posée en 2 semaines plutôt que 3, on suppose que les autres tâches sont réalisées dans le temps prévu initialement.

Question 13

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le retard maximum que les installateurs du chauffage peuvent enregistrer sans retarder l'ensemble des travaux, ne doit pas excéder une semaine.	☐	☐
B. Le retard maximum que les couvreurs (qui installent la toiture) peuvent enregistrer sans que la durée totale des travaux soit modifiée ne doit pas excéder une semaine.	☐	☐
C. Le retard maximum que l'on peut accorder à la tâche « peinture extérieure » sans que la durée totale des travaux soit modifiée ne doit pas excéder 5 semaines.	☐	☐
D. Si aucun retard n'est pris dans aucune tâche, l'ensemble des travaux demandera exactement 26 semaines.	☐	☐

Question 14

On note :

- T une tâche quelconque, parmi les tâches de l'énoncé.
- $R_1(T)$ le retard maximum, exprimé en nombre entier de semaines, que peut prendre la réalisation de la tâche T sans qu'elle retarde la durée totale du projet.
- $R_2(T)$ le retard maximum, exprimé en nombre entier de semaines, que peut prendre la réalisation de la tâche T sans qu'elle retarde le début de la tâche qui suit immédiatement (et donc sans retarder la durée totale du projet).

On dit qu'une tâche T est « critique » si $R_1(T) = R_2(T) = 0$.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour toute tâche T : $R_1(T) \leq R_2(T)$.	☐	☐
B. Précisément pour la tâche T : « réalisation de la toiture », on a : $R_1(T) = 1$ et $R_2(T) = 0$.	☐	☐
C. Précisément pour la tâche T : « peinture extérieure » : $R_1(T) = 5$.	☐	☐
D. Les seules tâches non critiques sont : « réalisation de la toiture », « peinture extérieure » et « installation du système de chauffage ».	☐	☐

Question 15

Dans les mêmes conditions que précédemment, on suppose que les durées des tâches sont variables et sont toujours exprimées en nombre entier de semaines.

Précisément, on dénote les durées suivantes : Fondations : a semaines ; Gros oeuvre : b semaines ; Toiture : c semaines ; Portes et fenêtres : d semaines ; Peinture extérieure : e semaines ; Circuit électrique : f semaines ; Installation du chauffage : g semaines ; Travaux de finition intérieure : h semaines.

On suppose que : $d \geq c$, $f \geq g$ et $f \geq e$.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si aucune tâche n'enregistre de retard, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h$ semaines.	☐	☐
B. Si les travaux de finition intérieure durent x semaines de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + x$ semaines.	☐	☐
C. Si les travaux de fondations durent 1 semaine de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + 1$ semaines.	☐	☐
D. Si les travaux de peinture extérieure requièrent y semaines de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + y$ semaines.	☐	☐

Question 16

Après avoir réalisé le gros oeuvre, l'architecte vous demande de l'aider à évaluer la rentabilité de la mise en place d'un isolant intérieur dans chacune des pièces de l'immeuble. Vous disposez des informations suivantes qui correspondent à une pièce parfaitement représentative de l'ensemble de celles que l'on peut trouver dans l'immeuble :

- Taille de la pièce non isolée : longueur 10,22 mètres, largeur 5,22 mètres et hauteur 3 mètres.
- Coût du chauffage annuel : 4 € par m^3 Les caractéristiques de l'isolant posé uniquement sur les 4 murs sont les suivantes :
- Epaisseur de l'isolant : 11 cm
- Coût de l'isolation pose comprise : 2 000 €.
- L'isolant posé réduit le volume de la pièce à chauffer.
- Gain de chauffage lié à la présence de l'isolant par rapport à une pièce non isolée : 25 % du coût annuel par m^3 à chauffer.

Pour simplifier les calculs, on ne tient pas compte de la présence de portes et fenêtres. De plus, le calcul des volumes des pièces sera arrondi au m^3 .

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le volume de la pièce sans isolant est inférieur à $160 m^3$.	☐	☐
B. Sur une année, le chauffage d'une pièce non isolée coûte plus de 600 €.	☐	☐
C. En isolant la pièce, le volume de celle-ci se réduit de plus de 10 %.	☐	☐
D. Sur une année, le chauffage de la pièce isolée coûte 600 €.	☐	☐

Question 17

L'investissement est jugé rentable dès que la réduction des factures de chauffage, cumulée depuis la pose de l'isolant, est au moins égale au coût de l'isolation.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Sur une période de 5 ans, l'économie de chauffage, réalisée par l'isolation, est supérieure à 1 000 €.	☐	☐
B. La pose de l'isolant devient rentable durant la 13 ^e année .	☐	☐
C. Si l'isolant permettait de réduire la facture de chauffage à 440 € par an, l'investissement deviendrait rentable durant la 8 ^{ème} année.	☐	☐
D. Le gain de chauffage, lié à la présence de l'isolant, doit être de 35 % du coût annuel par m ³ à chauffer pour que l'investissement devienne rentable exactement 8 ans après la pose de l'isolant.	☐	☐

Question 18

Les propriétaires qui ont payé 1 000 €/m² un local de l'immeuble (la surface facturée est celle calculée sans isolation arrondie au m²) acceptent la mise en place de l'isolant et la financent également (2 000 €). Un de leurs conseillers les invite à s'interroger sur toutes les conséquences économiques de la mise en place de l'isolant. En particulier, il insiste sur le fait que l'isolation réduit la surface utile de la pièce. En cas de revente, la surface facturée, surface arrondie au m², sera donc réduite.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'investissement initial (achat + isolation) est inférieur à 55 000 €.	☐	☐
B. Au bout de 20 ans, si le local est revendu à 1 300 €/m ² , les propriétaires gagneront plus de 1 000 € compte tenu de l'investissement initial et des coûts de chauffage.	☐	☐
C. Au bout de 20 ans, le local doit être revendu à au moins 1 280 €/m ² pour que les propriétaires récupèrent leur investissement initial et les coûts de chauffage.	☐	☐
D. Une pièce non isolée revendue au bout de 20 ans à 1 300 €/m ² , fait gagner au propriétaire plus d'argent qu'une pièce isolée revendue au même prix au m ² .	☐	☐