

Raisonnement mathématique

Question 9

On considère l'équation définie dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3mx + m^2 = 0$ où m est un paramètre réel. On pose $u = x + \frac{m}{x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet la racine double $x = 0$ et les 2 racines $x = 1$ et $x = 2$.	✓	
B. Pour $m \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a le même ensemble de racines que : $u^2 - 3u - 2(m - 1) = 0$.	✓	
C. Pour $m = 1$, l'équation $f(x) = 0$ admet les deux racines $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.	✓	
D. Pour $m = 3$, $f(x)$ s'écrit : $f(x) = (x^2 + x + 3)(x - 1)(x - 3)$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – Pour $m = 0$: $f(x) = x^2(x^2 - 3x + 2) = x^2(x - 1)(x - 2)$. Vrai.
- B. **VRAI** – Pour $m \neq 0$, 0 n'est pas racine; en divisant par x^2 : $x^2 + \frac{m^2}{x^2} - 3\left(x + \frac{m}{x}\right) + 2 = u^2 - 2m - 3u + 2 = u^2 - 3u - 2(m - 1)$. Vrai.
- C. **VRAI** – $m = 1$: $u^2 - 3u = 0$, $u = 0$ (pas de solution réelle pour $x + 1/x = 0$) ou $u = 3$: $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vrai.
- D. **VRAI** – $(x^2 + x + 3)(x - 1)(x - 3) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9$, qui est bien f pour $m = 3$. Vrai.