

Raisonnement mathématique

Question 8

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.	✓	
B. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f , au point de coordonnées $(\frac{1}{e} ; 1)$ s'écrit $y = -ex + e + 1$.		✓
C. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{e}[$, la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$.		✓
D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – $f(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$: f décroît sur $]0; 1]$, croît ensuite, minimum $f(1) = 0$.
Donc $f \geq 0$. Vrai.
- **B. FAUX** – $f(1/e) = 1$ mais $f'(1/e) = -e^2$; tangente : $y = -e^2x + e + 1$, pas $-ex$. Faux.
- **C. FAUX** – $f(x) < 1 \iff 1 + \ln x > 0 \iff x > 1/e$. Sur $]0; 1/e[$ la courbe est au-dessus de $y = 1$. Faux.
- **D. VRAI** – $\ln x/x \rightarrow 0$ et $1/x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 1$. Vrai.