

Session du 2011 – 24 questions, 4 affirmations à qualifier VRAI ou FAUX par question. Calculatrice de la plateforme uniquement.

Raisonnement logique

Question 1

Un fleuriste a en stock 1 000 fleurs réparties en trois variétés (roses, tulipes et marguerites) et trois couleurs (blanc, rouge et jaune). Il y a autant de fleurs rouges que de fleurs jaunes. Un quart des fleurs blanches sont des roses et 30 % des fleurs blanches sont des tulipes. Il y a 180 marguerites blanches parmi les 500 marguerites.

20 % des roses sont rouges et sont au nombre de 60. On dénombre le même nombre de tulipes rouges que de tulipes jaunes.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Il y a 400 fleurs rouges.		✓
B. Il y a autant de marguerites jaunes que de tulipes blanches.	✓	
C. Il y a 300 roses.	✓	
D. Le nombre de fleurs jaunes est inférieur au nombre de fleurs blanches.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – 20 % des roses = 60 donc 300 roses ; 500 marguerites, donc 200 tulipes. Les marguerites blanches (180) représentent $100\% - 25\% - 30\% = 45\%$ des blanches, d'où 400 fleurs blanches, puis rouges = jaunes = $(1000 - 400)/2 = 300$. Il y a 300 fleurs rouges et non 400.
- **B. VRAI** – Tulipes blanches = 30 % de 400 = 120. Roses blanches = 100, roses rouges = 60, roses jaunes = 140 ; tulipes rouges = tulipes jaunes = $(200 - 120)/2 = 40$; marguerites jaunes = $300 - 140 - 40 = 120$ = tulipes blanches.
- **C. VRAI** – Les roses rouges sont 60 et représentent 20 % des roses : $60/0,2 = 300$ roses.
- **D. VRAI** – 45 % des fleurs blanches sont des marguerites ($100 - 25 - 30$), et il y a 180 marguerites blanches : les fleurs blanches sont donc $180/0,45 = 400$. Comme rouges = jaunes et que le total vaut 1 000, rouges = jaunes = $(1000 - 400)/2 = 300$. Or $300 < 400$: le nombre de fleurs jaunes est bien inférieur au nombre de fleurs blanches, l'affirmation est VRAIE. Les deux passes trouvent les mêmes nombres ; la passe 1 a simplement mal reporté sa clé – son texte conclut explicitement « l'affirmation est donc VRAIE » alors que la lettre saisie était F. Il n'y a aucun désaccord mathématique à arbitrer.

Question 2

Antoine et Bernard jouent à un jeu de dés. Le jeu consiste, à tour de rôle, à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces différentes (portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6) et à noter le chiffre obtenu sur une feuille de papier, au fur et à mesure que la partie continue.

Préalablement, ils ont décidé de former 3 groupes de chiffres : le groupe A constitué des chiffres 1 et 2, le groupe B constitué des chiffres 3 et 4, et le groupe C constitué des chiffres 5 et 6.

La partie s'arrête dès qu'on arrive à l'une des 2 situations suivantes :

- on a noté sur la feuille de papier un chiffre du groupe A, un chiffre du groupe B et un chiffre du groupe C. Dans ce cas précis c'est Antoine qui est déclaré gagnant ;

- on a noté sur la feuille de papier 3 chiffres d'un même groupe. Dans ce cas précis c'est Bernard qui est le gagnant.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Une même partie comporte au minimum 4 lancers.		✓
B. Une même partie comporte au maximum 5 lancers.	✓	
C. La probabilité que la partie se poursuive au delà du 3 ^e lancer est égale à 1/9.		✓
D. Une même partie peut ne pas s'arrêter.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – Une partie peut s'arrêter dès le 3^e lancer (par exemple 1, 3, 5 : un chiffre de chaque groupe, ou 1, 1, 2 : trois chiffres du groupe A). Le minimum est 3 lancers.
- **B. VRAI** – Tant que la partie continue, aucun groupe n'a 3 chiffres et au plus 2 groupes sont représentés : après 4 lancers non conclusifs, la répartition est forcément 2 + 2 sur deux groupes ; le 5^e lancer donne soit un 3^e groupe, soit un 3^e chiffre d'un groupe, la partie s'arrête. Maximum 5 lancers.
- **C. FAUX** – Chaque groupe a probabilité 1/3. Après 3 lancers, arrêt si 3 groupes différents (6/27) ou 3 fois le même groupe (3/27) ; la partie se poursuit avec probabilité $1 - 9/27 = 2/3$, et non 1/9.
- **D. FAUX** – D'après B, toute partie s'arrête au plus tard au 5^e lancer : elle ne peut pas ne pas s'arrêter.

Question 3

Dans une entreprise de n salariés, un test est réalisé sur la dextérité de la main-d'oeuvre, sur une période de x heures. Chaque femme produit en moyenne 30 pièces par heure. D'autre part, les hommes deux fois plus nombreux que les femmes, ont réalisé y pièces au total.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le nombre total de pièces réalisées par les femmes est égal à $30x$.		✓
B. En moyenne, chaque salarié a produit : $\frac{y + 10nx}{n}$ pièces sur cette période.	✓	
C. Le rendement horaire moyen des hommes est égal à $\frac{3y}{2n}$.		✓
D. Si les rendements moyens des hommes et femmes sont égaux et de 30 pièces par heure et si 4 500 pièces au total sont produites en 30 minutes, les femmes sont au nombre de 100.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Il y a $n/3$ femmes (les hommes sont deux fois plus nombreux) ; elles produisent $30 \times x \times n/3 = 10nx$ pièces, et non $30x$.
- **B. VRAI** – Total produit = y (hommes) + $10nx$ (femmes) ; moyenne par salarié = $(y + 10nx)/n$.
- **C. FAUX** – Les $2n/3$ hommes produisent y pièces en x heures : rendement horaire moyen = $y/(x \cdot 2n/3) = 3y/(2nx)$. Le facteur x manque dans l'affirmation.
- **D. VRAI** – Les hommes sont deux fois plus nombreux que les femmes, donc les femmes sont $n/3$. Si tous produisent 30 pièces par heure, la production en 30 minutes vaut $30 \times 0,5 \times n = 15n$; $15n = 4\,500$ donne $n = 300$, donc $n/3 = 100$ femmes : l'affirmation est VRAIE. La passe 2 fait exactement le même calcul (9 000 pièces par heure, $n = 300$, $n/3 = 100$) et conclut pourtant F : sa clé contredit sa propre justification.

Question 4

Deux automobilistes Jean et Luc, partent respectivement, à la même heure, de deux villes reliées par une route nationale. Ils doivent se rencontrer pour échanger une mallette. Jean roule à la vitesse moyenne de x km/h et Luc, 10 km/h moins vite. Ils se rencontrent au bout d'une heure.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si les 2 villes sont séparées de 110 km alors Luc roulait à 50 km/h.	✓	
B. La distance qui sépare les 2 villes est de $(2x + 10)$ km.		✓
C. Si Jean roule à 50 km/h alors il parcourra $\frac{5}{9}$ de la distance entre les 2 villes.	✓	
D. Si Jean pouvait rouler 2 fois plus vite et Luc 10 km/h moins vite que lui alors ils mettraient 2 fois moins de temps pour se retrouver.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – En une heure, Jean parcourt x km et Luc $(x - 10)$ km : distance = $2x - 10$. Si $2x - 10 = 110$, $x = 60$ et Luc roulait à 50 km/h.
- **B. FAUX** – La distance est $x + (x - 10) = 2x - 10$ km, pas $2x + 10$.
- **C. VRAI** – Jean à 50 km/h, Luc à 40 km/h, distance 90 km ; Jean parcourt $50/90 = 5/9$ de la distance.
- **D. FAUX** – Vitesses $2x$ et $2x - 10$: vitesse de rapprochement $4x - 10$, temps de rencontre $(2x - 10)/(4x - 10)$, qui n'est pas $1/2$ (il faudrait $4x - 10 = 4x - 20$). Faux.

Question 5

Pour un âge donné (moins de 100 ans) : on note x le chiffre des dizaines, y le chiffre des unités et $(x - y)$ la différence des deux chiffres de l'âge.

Un mari affirme que si on additionne son âge, le produit des deux chiffres de son âge, la somme des 2 chiffres de son âge et la différence des deux chiffres de son âge, il obtient le nombre 100.

Il ajoute que c'est aussi le cas de l'âge de son épouse, qui est par ailleurs plus jeune que lui.

Une voisine du couple affirme que si on enlève la différence des deux chiffres à la somme composée de son âge, du produit des deux chiffres de son âge et de leur somme elle trouve également le nombre 100.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Concernant l'âge du mari, on a $(x + 1)(y + 12) - 12 = 100$	✓	
B. Concernant l'âge de la voisine, on a $(x + 3)(y + 10) - 30 = 100$.	✓	
C. Le mari est âgé de 72 ans.	✓	
D. On ne peut pas connaître l'âge de l'épouse.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Âge $10x + y$; la condition s'écrit $10x + y + xy + (x + y) + (x - y) = 100$, soit $xy + 12x + y = 100$. Or $(x + 1)(y + 12) - 12 = xy + 12x + y + 12 - 12 = xy + 12x + y$. L'égalité est bien équivalente.
- **B. VRAI** – Pour la voisine : $10x + y + xy + (x + y) - (x - y) = xy + 10x + 3y = 100$, et $(x + 3)(y + 10) - 30 = xy + 10x + 3y$. Vrai.
- **C. VRAI** – $(x + 1)(y + 12) = 112$ avec $1 \leq x + 1 \leq 10$ et $12 \leq y + 12 \leq 21$: diviseurs possibles 14 ($y = 2$, $x = 7$: 72 ans) ou 16 ($y = 4$, $x = 6$: 64 ans). Le mari, plus âgé que son épouse, a 72 ans.

- **D. FAUX** – Les deux seuls âges possibles sont 72 et 64 ; l'épouse, plus jeune, a 64 ans : on connaît son âge.

Question 6

Une liasse de billets de banque vient d'être dérobée par l'un des 4 membres du personnel d'une agence de banque, présents le jour du vol. Le directeur de cette agence interroge les 4 membres du service soupçonnés du vol : Antoine, Bernard, Christine et Dominique. Dominique accuse Bernard. Bernard accuse Christine. Antoine dit être innocent. Christine affirme que Bernard est un menteur.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Il y a au moins un menteur parmi les 4 membres soupçonnés.	✓	
B. Si on sait qu'il n'y a qu'un seul menteur alors le voleur est Bernard.	✓	
C. Si on sait qu'il y a 3 menteurs alors le voleur est Antoine.	✓	
D. Si on connaît le nombre de menteurs on peut donner le nom du voleur.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Dominique (« Bernard est le voleur ») et Bernard (« Christine est la voleuse ») ne peuvent pas dire vrai tous les deux puisqu'il n'y a qu'un voleur : au moins un menteur.
- **B. VRAI** – Nombre de menteurs selon le voleur : Antoine 3 (D, B et A mentent), Bernard 1 (seul B ment), Christine 2 (D et C), Dominique 2 (D et B). Un seul menteur correspond au voleur Bernard.
- **C. VRAI** – D'après le décompte précédent, 3 menteurs correspondent uniquement au cas où Antoine est le voleur (il ment en se disant innocent, Dominique et Bernard mentent aussi).
- **D. FAUX** – Avec 2 menteurs, le voleur peut être Christine ou Dominique : le nombre de menteurs ne suffit pas toujours à désigner le voleur.

Mathématiques

Question 7

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par $f(x) = 4^x$ et $g(x) = (0,25)^x$ et l'on note f' et g' leurs dérivées respectives.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.	✓	
B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.		✓
C. Pour tout réel x , $g(x) - f(-x) = 0$.	✓	
D. Pour tout réel x , $g'(x) - f'(-x) = 0$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $f(x) = 4^x = e^{x \ln 4}$ avec $\ln 4 > 0$: la limite en $+\infty$ est $+\infty$.
- **B. FAUX** – $g(x) = 0,25^x = 4^{-x}$ tend vers 0 en $+\infty$, pas vers $+\infty$.
- **C. VRAI** – $g(x) = (1/4)^x = 4^{-x} = f(-x)$ pour tout réel x , donc $g(x) - f(-x) = 0$.
- **D. FAUX** – $g'(x) = -\ln 4 \cdot 4^{-x}$ tandis que $f'(-x) = \ln 4 \cdot 4^{-x}$; leur différence vaut $-2 \ln 4 \cdot 4^{-x} \neq 0$.

Question 8

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La fonction g est impaire.	✓	
B. La fonction f est croissante.		✓
C. La fonction g est une primitive de la fonction f .	✓	
D. La courbe représentative de f admet un centre de symétrie.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et $-x\sqrt{1+x^2}$ est l'opposé de $x\sqrt{1+x^2}$: $g(-x) = -g(x)$, g est impaire.
- **B. FAUX** – $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ est négatif pour $x < 0$: f décroît sur $] -\infty, 0]$ puis croît. Elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
- **C. VRAI** – $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} = f(x)$.
- **D. FAUX** – f est paire (axe de symétrie $x = 0$) et tend vers $+\infty$ des deux côtés ; un centre de symétrie (a, b) imposerait $f(x) + f(2a - x) = 2b$ pour tout x , impossible puisque cette somme tend vers $+\infty$.

Question 9

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, on a :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $\lim_{u \rightarrow -2} f(-u) = 5$.	✓	
B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(2-x) = -5$.		✓
C. $\lim_{t \rightarrow 2} f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{5}{2}$.		✓
D. $\lim_{z \rightarrow +\infty} f\left(2 + \frac{1}{z}\right) = 5$.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Quand u tend vers -2 , $-u$ tend vers 2 et $f(-u)$ tend vers 5 .
- **B. FAUX** – Quand x tend vers 0 , $2-x$ tend vers 2 , donc $f(2-x)$ tend vers 5 , pas vers -5 .
- **C. FAUX** – Quand t tend vers 2 , $t/2$ tend vers 1 : la limite de f en 1 n'est pas donnée, on ne peut rien conclure (et certainement pas $5/2$ en général).
- **D. VRAI** – Quand z tend vers $+\infty$, $2 + 1/z$ tend vers 2 , donc la limite est 5 .

Question 10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-2 ; 2[$ par $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$, (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et (D) la droite d'équation $y = x$, ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle I .	✓	
B. La droite (D) et la courbe (C) ont au moins un point commun.	✓	
C. La suite (u_n) est majorée par 1.	✓	
D. La suite (u_n) est croissante.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – Les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, soit environ 0,618 et -1,618, toutes deux dans $]-2; 2[$.
- B. **VRAI** – $x = \frac{1+x}{2+x}$ équivaut (pour $x \neq -2$) à $x^2 + x - 1 = 0$, qui a deux solutions dans I : (C) et (D) ont deux points communs.
- C. **VRAI** – Pour $x > -2$, $\frac{1+x}{2+x} < 1$ car $1+x < 2+x$. Donc $u_n < 1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = -1 < 1$.
- D. **VRAI** – $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1/2$, $u_3 = 0,6...$ f est croissante sur $]-2; +\infty[$ ($f'(x) = 1/(2+x)^2 > 0$) et $u_1 > u_0$, donc par récurrence $u_{n+1} > u_n$: la suite est croissante (elle converge vers $(\sqrt{5}-1)/2$).

Question 11

On considère le système (S) constitué de deux équations où x et y sont deux inconnues réelles et m un réel donné :

$$(S) \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ mx + y = 3 \end{cases}$$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le système (S) admet au moins une solution quel que soit le réel m .		✓
B. Si $m = \frac{\sqrt{5}}{3}$ alors le système (S) admet comme solution le couple $(\sqrt{5}; \frac{4}{3})$.	✓	
C. Si $m = 1$, le système (S) admet deux solutions distinctes.	✓	
D. Le système (S) admet une solution unique pour deux valeurs de m .	✓	

Corrigé

- A. **FAUX** – En substituant $y = 3 - mx$: $(4 + 9m^2)x^2 - 54mx + 45 = 0$, de discriminant $1296m^2 - 720$, négatif si $m^2 < 5/9$ (par exemple $m = 0$: $9y^2 = 36$ et $y = 3$ sont incompatibles). Pas de solution pour tout m .
- B. **VRAI** – Pour $m = \sqrt{5}/3$, le discriminant est nul et $x = \frac{54m}{2(4 + 9m^2)} = 3m = \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}/3 = 4/3$. Vérification : $4 \cdot 5 + 9 \cdot 16/9 = 36$.
- C. **VRAI** – Pour $m = 1$, discriminant $1296 - 720 = 576 > 0$: deux solutions distinctes.
- D. **VRAI** – Solution unique si et seulement si le discriminant est nul, soit $m = \pm\sqrt{5}/3$: exactement deux valeurs de m .

Question 12

L'unité étant le centimètre, on considère un demi-cercle X de diamètre $[BC]$, A et D deux points de X tels que $BC = 5$, $AB = 3$, $DC = 3$. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en I. Dans le triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de A.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Les triangles ABC et DBC ont la même aire.	✓	
B. La longueur AH vaut $\frac{12}{5}$.	✓	
C. Le rapport $\frac{CH}{BH}$ vaut $\frac{1}{9}$.		✓
D. Le triangle IBC est équilatéral.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – A et D sur le demi-cercle de diamètre [BC] : ABC et DBC sont rectangles en A et en D ; $AC = DB = 4$ (Pythagore, 3-4-5). Aire commune $3 \times 4/2 = 6 \text{ cm}^2$.
- **B. VRAI** – $AH \times BC = AB \times AC$ donc $AH = 12/5$.
- **C. FAUX** – $BH = AB^2/BC = 9/5$ et $CH = AC^2/BC = 16/5$: $CH/BH = 16/9$, pas $1/9$.
- **D. FAUX** – Dans IBC, $\cos \hat{B} = AB/BC = 3/5$ et $\cos \hat{C} = DC/BC = 3/5$: le triangle est isocèle en I mais ses angles à la base ($\approx 53^\circ$) ne valent pas 60° , il n'est pas équilatéral.

Question 13

Dans une urne, il y a trois boules indiscernables au toucher de couleurs différentes (bleue, blanche et rouge).

On tire une boule, on note sa couleur, on la remet et on recommence le tirage ; on tire donc cinq boules en tout avec remise,

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité que la première et la dernière boule tirée soient de même couleur est $\frac{1}{3}$.	✓	
B. La probabilité d'avoir un tirage unicolore est $\frac{45}{243}$.		✓
C. La probabilité d'avoir un tirage bicolore est $\frac{90}{243}$.	✓	
D. La probabilité d'avoir un tirage tricolore est $\frac{108}{243}$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Quelle que soit la première boule, la dernière a la même couleur avec probabilité $1/3$ (tirages indépendants).
- **B. FAUX** – Tirages unicolores : 3 parmi $3^5 = 243$, soit $3/243$, pas $45/243$.
- **C. VRAI** – Exactement deux couleurs : choisir les 2 couleurs (3 façons) puis un tirage sur ces deux couleurs non unicolore ($2^5 - 2 = 30$) : $90/243$.
- **D. FAUX** – Tricolore = $243 - 3 - 90 = 150$ tirages, soit $150/243$, pas $108/243$.

Question 14

Soient a et b deux réels et $f_{a,b}$ la fonction définie par $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2 - 4}{x + b}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-b\}$, on note $C_{a,b}$ la courbe représentative de $f_{a,b}$ dans un repère orthonormé.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Il existe au moins une valeur de a telle que $C_{a,b}$ admette une asymptote horizontale.	✓	
B. Il existe au moins une valeur de a non nulle telle que $C_{a,b}$ admette une asymptote oblique.	✓	
C. Pour $(a, b) = (1, 1)$, $C_{a,b}$ est au-dessus de son asymptote quand tend x vers $+\infty$.		✓
D. Pour toutes les valeurs de (a, b) , $C_{a,b}$ admet une asymptote verticale.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Pour $a = 0$, $f(x) = -4/(x+b)$ tend vers 0 en $\pm\infty$: asymptote horizontale $y = 0$.
- **B. VRAI** – Pour $a \neq 0$, $f_{a,b}(x) = ax - ab + \frac{ab^2 - 4}{x+b}$: la droite $y = ax - ab$ est asymptote oblique (toute valeur non nulle de a convient).
- **C. FAUX** – $\frac{x^2 - 4}{x+1} = x - 1 - \frac{3}{x+1}$; pour $x \rightarrow +\infty$, $-3/(x+1) < 0$, la courbe est en dessous de son asymptote $y = x - 1$.
- **D. FAUX** – Si $ab^2 = 4$ (par exemple $a = 1, b = 2$), $f(x) = (x^2 - 4)/(x+2) = x - 2$ sur son domaine : pas d'asymptote verticale.

Question 15

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.	✓	
B. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.		✓
C. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Pour $n \geq 1$, $|(-1)^n + \sqrt{n+1}| \geq \sqrt{2} - 1 > 0$, donc $|U_n| \leq 1/(\sqrt{2} - 1) \approx 2,41$; $U_0 = 1/2$. La suite est bornée.
- **B. FAUX** – $U_1 = -1/(\sqrt{2} - 1) \approx -2,41$ et $U_2 = 1/(1 + \sqrt{3}) \approx 0,37 > U_1$: la suite n'est pas décroissante (elle alterne de signe).
- **C. FAUX** – $|U_n| \leq 1/(\sqrt{n+1} - 1) \rightarrow 0$: la suite converge vers 0, elle admet donc une limite.

Question 16

Un sac contient n boules parmi lesquelles 4 blanches, les autres étant rouges ($n \geq 6$). On tire successivement 2 boules du sac, sans remettre la première avant de tirer la seconde.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité de l'évènement « Les 2 boules tirées sont rouges » est de $\frac{n^2 - 9n + 20}{n(n-1)}$.	✓	
B. La probabilité de l'évènement « La première boule tirée est blanche, la deuxième est rouge » est de $\frac{4n-16}{n^2}$.		✓
C. La probabilité de l'évènement « Les 2 boules tirées sont de la même couleur » est de $\frac{n^2 - 9n + 32}{n(n+1)}$.		✓
D. La probabilité de l'évènement « La première boule tirée est rouge, la deuxième est blanche » est identique à celle de l'évènement « La première boule tirée est blanche, la deuxième est rouge ».	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – $P = \frac{n-4}{n} \cdot \frac{n-5}{n-1} = \frac{n^2 - 9n + 20}{n(n-1)}$.
- B. **FAUX** – $P = \frac{4}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4n-16}{n(n-1)}$: le dénominateur est $n(n-1)$, pas n^2 (tirage sans remise).
- C. **FAUX** – $P = \frac{(n-4)(n-5) + 4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 9n + 32}{n(n-1)}$: le numérateur est bon mais le dénominateur proposé $n(n+1)$ est faux.
- D. **VRAI** – Rouge puis blanche : $\frac{n-4}{n} \cdot \frac{4}{n-1}$; blanche puis rouge : $\frac{4}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1}$. Même valeur.

Question 17

Soit $(U_n)_{n>0}$ la suite définie par : $U_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{2n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La suite $(U_n)_{n>0}$ converge.	✓	
B. La suite $(U_n)_{n>0}$ est positive ou nulle.	✓	
C. La suite $(U_n)_{n>0}$ est bornée.	✓	
D. La suite $(U_n)_{n>0}$ est croissante.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $U_n = \frac{1 + (-1)^n / \sqrt{n}}{2 + 3/n} \rightarrow \frac{1}{2}$: la suite converge.
- B. **VRAI** – Pour $n \geq 1$, $n + (-1)^n \sqrt{n} \geq n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \geq 0$ et $2n + 3 > 0$: $U_n \geq 0$.
- C. **VRAI** – Toute suite convergente est bornée (ici $0 \leq U_n \leq (n + \sqrt{n})/(2n + 3) \leq 1$).
- D. **FAUX** – $U_1 = 0$, $U_2 = (2 + \sqrt{2})/7 \approx 0,49$, $U_3 = (3 - \sqrt{3})/9 \approx 0,14 < U_2$: pas croissante.

Question 18

On jette deux dés cubiques normaux et non truqués, l'un blanc, l'autre vert, Les faces de chacun des dés sont numérotées de 1 à 6, On note a la face apparente du dé blanc, et b celle du dé vert,

Soit E l'équation du second degré dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$

Alors :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité que E ait une racine double est $\frac{1}{6}$.	✓	
B. La probabilité que E n'ait aucune racine réelle est égale à la probabilité que E ait deux racines réelles distinctes.	✓	
C. Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité qu'elles soient de même signe est $\frac{1}{2}$.		✓
D. Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité que l'une soit égale à 1 est $\frac{1}{3}$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Discriminant réduit $a^2 - b^2$; racine double si $a = b$: 6 cas sur 36, soit $1/6$.
- **B. VRAI** – Aucune racine si $a < b$ (15 cas), deux racines distinctes si $a > b$ (15 cas) : probabilités égales ($15/36$).
- **C. FAUX** – Le produit des racines vaut $b^2 > 0$: deux racines réelles distinctes sont toujours de même signe, probabilité 1 et non $1/2$.
- **D. FAUX** – 1 racine impose $1 - 2a + b^2 = 0$, soit $b^2 = 2a - 1$: avec $a > b$, seul $(a, b) = (5, 3)$ convient, d'où une probabilité conditionnelle $1/15$ et non $1/3$.

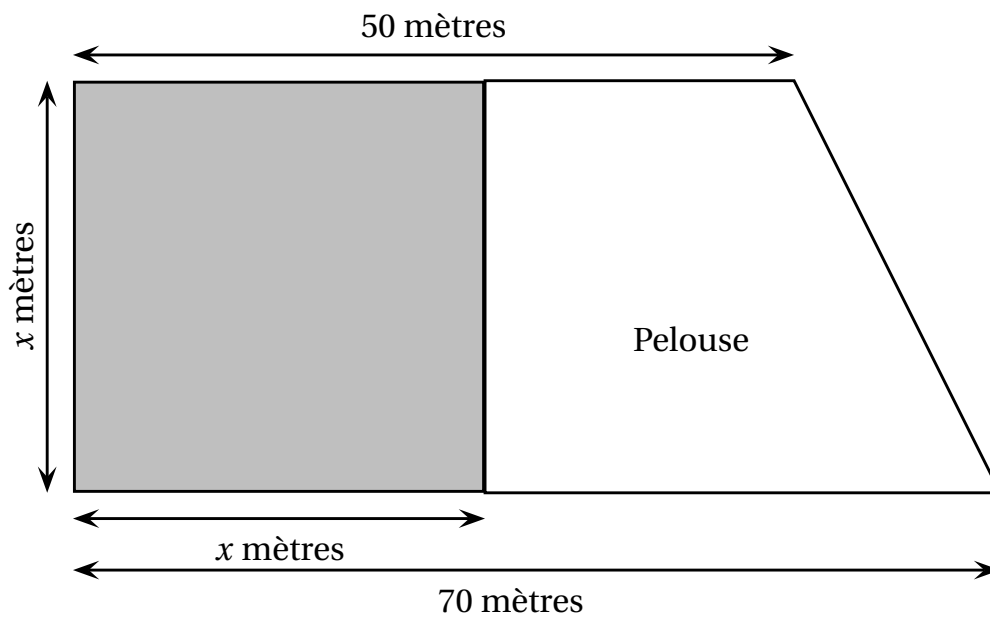
Problème mathématique

ATTENTION!

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes

La figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) est une représentation d'une parcelle de terrain (notée P_1) que Monsieur Potiron souhaite partager en deux parties :

- une partie en jardin potager (surface grisée) formant un carré de x mètres de côté avec $0 < x < 50$ mètres,
- l'autre partie en pelouse



On notera :

- S : aire totale de la parcelle de terrain
- J : aire jardin potager
- P : aire de la pelouse

Question 19

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $S \leq 3\,000 \text{ m}^2$.	✓	
B. Il existe une valeur de x inférieure à 35 telle que $J = P$.	✓	
C. La surface de la pelouse est maximale lorsque $x = 25$ mètres,		✓
D. Le périmètre de cette parcelle de terrain est égal à : $x + (x^2 + 400)^{0,5} + 120$.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – La parcelle est un trapèze de bases 50 et 70 m et de hauteur x : $S = 60x$. Comme $x < 50$, $S < 3\,000 \text{ m}^2$.
- **B. VRAI** – $J = x^2$, $P = 60x - x^2$; $J = P$ équivaut à $2x^2 = 60x$, soit $x = 30 < 35$.
- **C. FAUX** – $P(x) = 60x - x^2$ est maximale pour $x = 30$ (sommet de la parabole), pas 25.
- **D. VRAI** – Périmètre = $50 + x + 70 + \text{côté oblique}$; le côté oblique a pour projections $70 - 50 = 20$ et x , donc mesure $\sqrt{x^2 + 400}$. Total : $x + (x^2 + 400)^{0,5} + 120$.

Question 20

Dans cette question, on suppose que $x = 21$ mètres, Monsieur Potiron souhaite délimiter la pelouse avec une clôture en bois dont le prix du mètre est de 30 euros après une remise de 20 % sur le prix initial. Sur le métrage dépassant 100 mètres, un rabais supplémentaire de 30 % est accordé,

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le prix initial d'un mètre de clôture en bois est 36 €.		✓
B. Monsieur Potiron doit acheter moins de 120 mètres de clôture.		✓
C. Le montant réglé par Monsieur Potiron est égal à 3 588 €.	✓	
D. Le prix de revient moyen d'un mètre de clôture est égal à 25,50 €.		✓

Corrigé

- A. **FAUX** – 30 € après 20 % de remise : prix initial $30/0,8 = 37,50$ €, pas 36 €.
- B. **FAUX** – Pour $x = 21$ le côté oblique vaut $\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$; le pourtour de la pelouse est $29 + 49 + 21 + 29 = 128$ m (le côté commun avec le potager compris), donc plus de 120 m.
- C. **VRAI** – 100 m à 30 € = 3 000 €; 28 m à $30 \times 0,7 = 21$ € = 588 €; total 3 588 €.
- D. **FAUX** – Prix moyen $3588/128 \approx 28,03$ €, pas 25,50 €.

Question 21

Monsieur Potiron envisage de produire des fruits ou des légumes sur cette parcelle, On nous précise que pour 220 euros, Monsieur Potiron pourrait obtenir 50 plants d'un légume et 40 pieds d'un fruit alors que pour 230 euros, il aurait 25 plants de ce légume et 60 pieds de ce fruit.

On appelle x_1 le prix d'un plant de légume et x_2 le prix d'un pied de fruit.

Supposons que Monsieur Potiron choisisse de cultiver des fruits.

- Le coût total exprimé en euros pour y kg de fruits ($y > 0$) produits en une journée est :

$$C(y) = 0,25y^2 + y + 30.$$

- Le coût moyen unitaire, exprimé en euros par kg, est noté $C_M(y)$:

$$C_M(y) = \frac{C(y)}{y}.$$

Chaque kg de fruit peut être vendu 7,50 €.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $x_2 = x_1 + 1$.	✓	
B. $x_1 = 3$ euros.		✓
C. Si $y = 10$, Monsieur Potiron réalisera un bénéfice de 10 € sur la journée.	✓	
D. Si $y = 9$, le coût moyen unitaire est minimum.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $50x_1 + 40x_2 = 220$ et $25x_1 + 60x_2 = 230$ donnent $x_1 = 2$, $x_2 = 3$: $x_2 = x_1 + 1$.
- B. **FAUX** – $x_1 = 2$ €, pas 3.
- C. **VRAI** – $C(10) = 25 + 10 + 30 = 65$ €; recette $10 \times 7,50 = 75$ €; bénéfice 10 €.
- D. **FAUX** – $C_M(y) = 0,25y + 1 + 30/y$, dérivée $0,25 - 30/y^2$ nulle pour $y = \sqrt{120} \approx 10,95$: le minimum n'est pas en $y = 9$.

Question 22

Dans cette question on suppose que la surface du potager est égal au double de celle de la pelouse. Monsieur Potiron décide finalement de produire des tomates sur le quart de la surface du potager et des laitues sur la partie restante.

Les rendements moyens par ha (un hectare est égal à 10 000 m²) et par année sont respectivement de 20 tonnes pour les tomates et 4 000 pieds pour les laitues.

D'autre part, les travaux d'aménagement du sol, de semence et de récolte demandent l'emploi de 10 hommes par jour et par hectare pour les tomates et de 20 hommes par jour et par hectare pour la laitue.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La surface du potager est égale ou supérieure à 0,15 ha.	✓	
B. La production annuelle de tomates est égale à 200 kg.		✓
C. Le nombre annuel de pieds de laitues est inférieur à 500.	✓	
D. L'emploi de deux hommes est suffisant pour réaliser les travaux.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $x^2 = 2(60x - x^2)$ donne $x = 40$: potager de 1 600 m² = 0,16 ha $\geq$ 0,15 ha.
- **B. FAUX** – Tomates sur 400 m² = 0,04 ha : $0,04 \times 20 \text{ t} = 0,8 \text{ t} = 800 \text{ kg}$, pas 200 kg.
- **C. VRAI** – Laitues sur 1 200 m² = 0,12 ha : $0,12 \times 4\,000 = 480$ pieds $<$ 500.
- **D. FAUX** – Besoin : $10 \times 0,04 + 20 \times 0,12 = 0,4 + 2,4 = 2,8$ hommes par jour ; deux hommes ne suffisent pas.

Question 23

Monsieur Potiron s'est livré à une étude statistique sur trois autres parcelles.

Sur une parcelle (notée P₂), il a mesuré la hauteur en cm de 100 plantes à l'âge de 6 semaines et a obtenu une moyenne égale à 56 cm (notée m_2) à partir des données suivantes, où a est un nombre réel tel que $0 < a < 60$.

Hauteur	Nombre plantes concernées
$[0 ; a[$	10
$[a ; 60[$	60
$[60 ; 100[$	30

Sur les deux autres parcelles (P₃ et P₄), on dispose des effectifs observés :

	Nombre plantes	Hauteur moyenne
P ₃	60	m_3
P ₄	40	m_4

On sait que les trois moyennes m_2, m_3 , et m_4 sont trois valeurs variant en progression arithmétique dont la somme est égale à 144.

On appelle M la hauteur moyenne de l'ensemble des plantes présentes dans les trois parcelles P₂, P₃ et P₄.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $a = 30$.		✓
B. Si la répartition des hauteurs dans chaque classe est uniforme, 75 % des plantes de la parcelle P_2 ont une hauteur au moins égale à 45 cm.	✓	
C. $m_3 = 64$.		✓
D. $M = 48$.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – Avec les centres de classes : $10 \cdot a/2 + 60 \cdot (a + 60)/2 + 30 \cdot 80 = 5600$, soit $35a = 1400$ et $a = 40$, pas 30.
- **B. VRAI** – Avec $a = 40$ et répartition uniforme, la classe $[40; 60[$ compte $60 \times 15/20 = 45$ plantes d'au moins 45 cm, plus les 30 de $[60; 100[$: 75 plantes sur 100, soit 75 %.
- **C. FAUX** – Les trois moyennes m_1, m_2, m_3 sont, dans cet ordre, en progression arithmétique : m_2 en est le terme central, donc $m_1 + m_3 = 2m_2$ et la somme vaut $3m_2 = 144$, soit $m_2 = 48$ (avec $m_1 = 56$, donc $m_3 = 40$ et une raison de -8). L'affirmation $m_3 = 64$ est donc FAUSSE : elle donnerait une somme $56 + 64 + 72 = 192 \neq 144$. Les deux passes calculent $m_2 = 48$; la passe 1 a mal reporté sa clé (son texte dit « l'affirmation $m_2 = 64$ est donc fausse » mais la lettre saisie était V).
- **D. FAUX** – $M = (100 \times 56 + 60 \times 48 + 40 \times 40)/200 = 50,4$ (et 49,6 si l'on échangeait m_3 et m_4) : pas 48.

Question 24

Monsieur Potiron a également expérimenté les effets d'un produit anti-mildiou sur la vigne qu'il cultive. Quarante pieds de vigne situés dans des lieux aléatoires ont été traités alors que soixante autres n'ont pas reçu de traitement.

Quelques semaines plus tard, les résultats observés en termes de contamination par la maladie sont les suivants :

- 25 % des pieds traités sont contaminés ;
- 40 % des pieds sont contaminés.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 55 % des pieds non traités sont contaminés.		✓
B. 50 % des pieds contaminés n'ont pas été traités.		✓
C. 10 % des pieds étudiés ont été contaminés et traités.	✓	
D. 70 pieds ont été traités ou n'ont pas été contaminés.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Contaminés : 40 % de 100 = 40, dont 25 % de 40 = 10 traités ; 30 non traités contaminés sur 60, soit 50 %, pas 55 %.
- **B. FAUX** – 30 contaminés non traités sur 40 contaminés : 75 %, pas 50 %.
- **C. VRAI** – 10 pieds traités et contaminés sur 100 : 10 %.
- **D. VRAI** – Traités (40) ou non contaminés (60) : $40 + 60 - 30$ (traités non contaminés) = 70 pieds.