

Mathématiques

Question 10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-2 ; 2[$ par $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$, (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et (D) la droite d'équation $y = x$, ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle I .	✓	
B. La droite (D) et la courbe (C) ont au moins un point commun.	✓	
C. La suite (u_n) est majorée par 1.	✓	
D. La suite (u_n) est croissante.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, soit environ 0,618 et -1,618, toutes deux dans $] -2 ; 2[$.
- **B. VRAI** – $x = \frac{1+x}{2+x}$ équivaut (pour $x \neq -2$) à $x^2 + x - 1 = 0$, qui a deux solutions dans I : (C) et (D) ont deux points communs.
- **C. VRAI** – Pour $x > -2$, $\frac{1+x}{2+x} < 1$ car $1+x < 2+x$. Donc $u_n < 1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = -1 < 1$.
- **D. VRAI** – $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1/2$, $u_3 = 0,6...$ f est croissante sur $] -2 ; +\infty[$ ($f'(x) = 1/(2+x)^2 > 0$) et $u_1 > u_0$, donc par récurrence $u_{n+1} > u_n$: la suite est croissante (elle converge vers $(\sqrt{5}-1)/2$).