

Mathématiques

Question 8

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La fonction g est impaire.	✓	
B. La fonction f est croissante.		✓
C. La fonction g est une primitive de la fonction f .	✓	
D. La courbe représentative de f admet un centre de symétrie.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et $-x\sqrt{1+x^2}$ est l'opposé de $x\sqrt{1+x^2}$: $g(-x) = -g(x)$, g est impaire.
- **B. FAUX** – $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ est négatif pour $x < 0$: f décroît sur $] -\infty, 0]$ puis croît. Elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
- **C. VRAI** – $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} = f(x)$.
- **D. FAUX** – f est paire (axe de symétrie $x = 0$) et tend vers $+\infty$ des deux côtés ; un centre de symétrie (a, b) imposerait $f(x) + f(2a - x) = 2b$ pour tout x , impossible puisque cette somme tend vers $+\infty$.