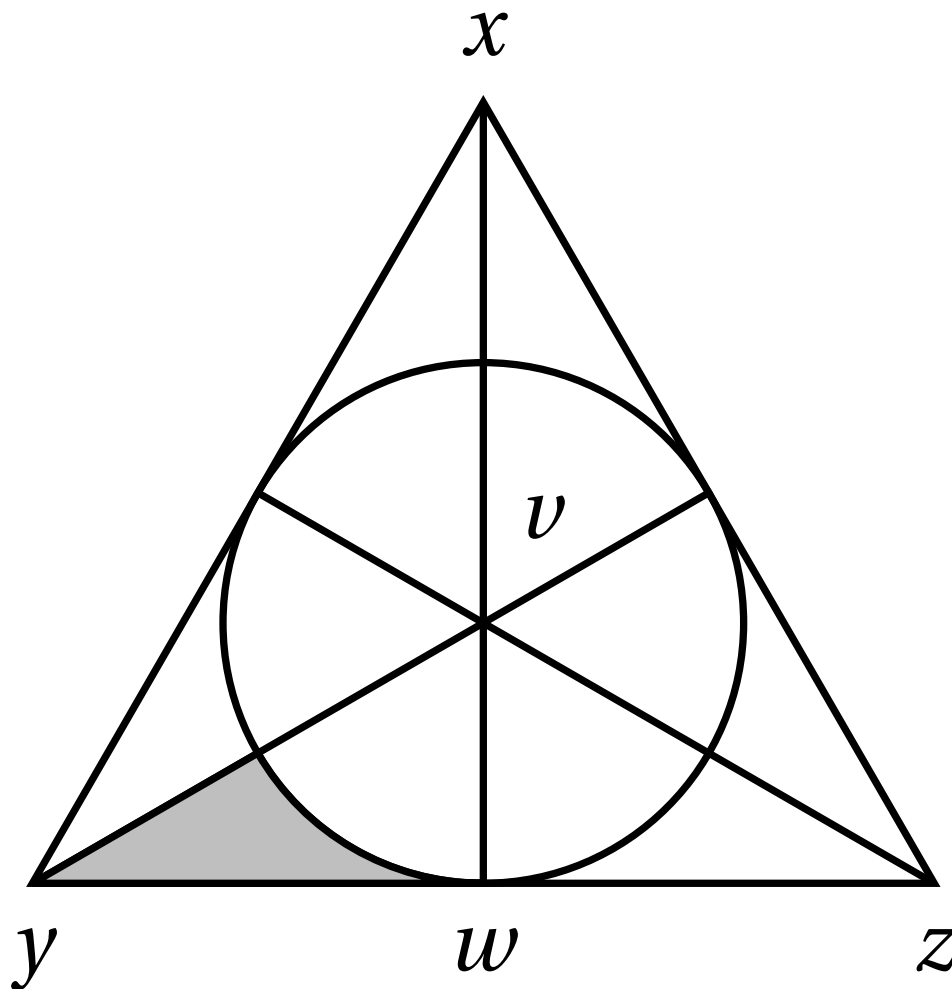


Session du 2010 – 24 questions, 4 affirmations à qualifier VRAI ou FAUX par question. Calculatrice de la plateforme uniquement.

Logique

Question 1

Soit le triangle équilatéral xyz où $xy = 4$. Soit le cercle inscrit de centre v et de rayon $vw = 1/3wx$.



À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le rayon $vw = \sqrt{3}$.		✓
B. La surface du triangle xyz est égale à $3\sqrt{3}$.		✓
C. L'aire du disque inscrit vaut 2π .		✓
D. La surface coloriée vaut $\frac{2}{3}(\sqrt{3} - \pi)$.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – La hauteur du triangle équilatéral de côté 4 vaut $wx = 2\sqrt{3}$, donc $vw = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15 \neq \sqrt{3}$.
- **B. FAUX** – Aire $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$, et non $3\sqrt{3}$.
- **C. FAUX** – Aire du disque $= \pi r^2 = \pi \cdot \frac{12}{9} = \frac{4\pi}{3} \neq 2\pi$.
- **D. FAUX** – La zone grisée est le triangle rectangle yvw ($yw = 2$, $vw = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, aire $\frac{2\sqrt{3}}{3}$) privé du secteur de 60° au centre v (aire $\frac{2\pi}{9}$) : elle vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9} = \frac{2}{3} (\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}) \approx 0,46$. La valeur proposée $\frac{2}{3}(\sqrt{3} - \pi)$ est négative : fausse.

Question 2

Nous disposons de quatre haltères W, X, Y et Z. L'haltère W pèse 8 kg. L'haltère X équivaut à l'haltère Y plus l'haltère W et 5 fois l'haltère Y équivaut à l'haltère W plus l'haltère X. L'haltère Z équivaut à l'haltère X plus l'haltère Y.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'haltère W est plus lourd que l'haltère Z.		✓
B. L'haltère Y est plus lourd que l'haltère Z.		✓
C. Le poids des quatre haltères est égal à 40 kg.	✓	
D. Le poids total des haltères W et X est plus grand que le poids total des haltères Y et Z.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – $W = 8$, $X = Y + 8$ et $5Y = 8 + X = Y + 16$ donnent $Y = 4$, $X = 12$, $Z = X + Y = 16$. $W = 8 < Z = 16$.
- **B. FAUX** – $Y = 4 < Z = 16$.
- **C. VRAI** – $8 + 12 + 4 + 16 = 40$ kg.
- **D. FAUX** – $W + X = 20$ et $Y + Z = 20$: égalité, pas strictement plus grand.

Question 3

Devant vous, se trouvent trois gobelets dont l'un cache un bijou. Les trois gobelets sont discernables par les lettres X, Y et Z. Sur chaque gobelet est portée une inscription. Une seule inscription parmi les trois est vraie.

- Sur le gobelet X, on lit l'inscription « le bijou est dans ce gobelet »,
- Sur le gobelet Y, on lit l'inscription « le bijou n'est pas dans ce gobelet »,
- Sur le gobelet Z, on lit l'inscription « le bijou n'est pas dans le gobelet X ».

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le bijou n'est pas dans le gobelet Y.		✓
B. Le bijou n'est pas dans le gobelet X.	✓	
C. Le bijou est dans le gobelet Z.		✓
D. Les inscriptions portées sur les gobelets Y et Z sont fausses.		✓

Corrigé

- **A. FAUX** – Si le bijou est en X, les inscriptions X et Y sont vraies (2 vraies); en Z, Y et Z sont vraies; en Y, seule Z est vraie. Donc le bijou est dans Y : A est fausse.
- **B. VRAI** – Le bijou est dans Y, donc pas dans X.
- **C. FAUX** – Le bijou est dans Y, pas dans Z.
- **D. FAUX** – L'inscription de Z (« pas dans X ») est vraie; seule celle de Y est fausse avec celle de X.

Question 4

Un couple a trois enfants : un fils aîné et deux filles qui sont jumelles. On dispose des informations suivantes :

- La somme des âges de la famille est égale à 172 ans;
- Le père est 2 ans plus âgé que sa femme;
- La différence d'âge entre la mère et le fils est égale au double de la différence d'âges entre le garçon et une de ses soeurs;
- Quand les filles auront l'âge qu'a actuellement leur mère, le fils sera deux fois plus âgé qu'il l'est aujourd'hui.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La différence d'âge entre le garçon et une de ses soeurs est de 10 ans.	✓	
B. Le père a eu son premier enfant à 25 ans.		✓
C. L'âge moyen de la famille est inférieur à 30 ans.		✓
D. La mère a 30 ans de plus que ses filles.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Notons t l'âge des jumelles, s celui du fils, m la mère, $p = m + 2$. La 4e condition donne $m - t = s$; la 3e donne $t = 2(s - t)$ soit $s = 3t/2$, $m = 5t/2$. La somme $\frac{5t}{2} + 2 + \frac{5t}{2} + \frac{3t}{2} + 2t = 172$ donne $t = 20$, $s = 30$, $m = 50$, $p = 52$. Différence fils/fille = 10 ans.
- **B. FAUX** – Le père a 52 ans et l'aîné 30 : premier enfant à 22 ans, pas 25.
- **C. FAUX** – Moyenne = $172/5 = 34,4$ ans > 30 .
- **D. VRAI** – $m - t = 50 - 20 = 30$ ans.

Question 5

Nous possédons les informations suivantes concernant trois revues (notées L, M et N) lues par les 320 élèves de première année d'une grande école de management :

- 80 lisent la revue L, 100 la revue M et 30 la revue N;
- Il y a autant d'élèves à lire les trois revues qu'à lire la seule revue L;
- Ceux qui lisent seulement les revues L et N sont au nombre de 15;
- 80 élèves lisent exactement deux revues;
- 60 lisent les revues L et M.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Il y a exactement 200 élèves qui ne lisent aucune revue.	✓	
B. Il y a exactement 5 élèves qui ne lisent que la revue L seule.	✓	
C. Aucun élève ne lit la revue N seule.	✓	
D. Il y a exactement 6 élèves qui lisent les 3 revues.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Avec $x = \text{triple} = \text{L seule}$, $\text{LM seules} = 60 - x$, $\text{LN seules} = 15$, $\text{MN seules} = 80 - 15 - (60 - x) = 5 + x$; $|L| = x + (60 - x) + 15 + x = 80$ donne $x = 5$. Puis $\text{M seule} = 100 - 55 - 10 - 5 = 30$, $\text{N seule} = 30 - 15 - 10 - 5 = 0$. Lecteurs = $5+55+15+5+30+10+0 = 120$, donc $320 - 120 = 200$ sans revue.
- **B. VRAI** – $\text{L seule} = x = 5$.
- **C. VRAI** – $\text{N seule} = 30 - 15 - 10 - 5 = 0$.
- **D. FAUX** – Les trois revues : $x = 5$, pas 6.

Question 6

Une entreprise est composée uniquement de 3 catégories de personnel : les cadres supérieurs, les cadres moyens et les employés. Il y a au total 270 employés qui travaillent dans cette entreprise. 90 % des cadres supérieurs, soit 9 personnes, y travaillent à plein temps. Alors que le reste des cadres supérieurs est à temps partiel. 80 % des cadres moyens, soit 16 personnes, y travaillent à plein temps. Alors que le reste des cadres moyens est à temps partiel. Un tiers des employés y travaillent à temps partiel. Alors que le reste des employés est à temps complet.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'effectif total de l'entreprise est égal à 305.		✓
B. Il y a au total 4 cadres moyens qui travaillent à temps partiel.	✓	
C. Il y a au total 200 personnes qui travaillent à temps plein.		✓
D. Les cadres représentent 10 % du personnel de l'entreprise.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Cadres supérieurs : $9/0,9 = 10$; cadres moyens : $16/0,8 = 20$; employés : 270. Total 300, pas 305.
- **B. VRAI** – $20 - 16 = 4$ cadres moyens à temps partiel.
- **C. FAUX** – Temps plein : $9 + 16 + (2/3) \cdot 270 = 9 + 16 + 180 = 205$, pas 200.
- **D. VRAI** – Cadres : $30/300 = 10\%$.

Mathématiques

Question 7

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4-x}$ et T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 0$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$.	✓	
B. Pour tout $x < 4$ on a $f'(x) = \frac{8-3x}{\sqrt{4-x}}$ où f' est la fonction dérivée de f .	✓	
C. Pour tout $x \in]-\infty ; 4]$ on a $f(x) \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$.	✓	
D. La courbe représentative de la fonction f est au dessus de la droite T.		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – Quand $x \rightarrow -\infty$, $2x \rightarrow -\infty$ et $\sqrt{4-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.
- B. **VRAI** – $f'(x) = 2\sqrt{4-x} - \frac{x}{\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{4-x}}$ pour $x < 4$.
- C. **VRAI** – f' s'annule en $x = 8/3$ (maximum) : $f(8/3) = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$, majorant sur $] -\infty ; 4]$.
- D. **FAUX** – $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$: T a pour équation $y = 4x$. $f(x) - 4x = 2x(\sqrt{4-x} - 2)$ est négatif pour $x > 0$ (racine < 2) comme pour $x < 0$ (racine > 2) : la courbe est en dessous de T.

Question 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2)}$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $]0 ; +\infty[$.		✓
B. La fonction f peut être reformulée de la façon suivante : $f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(x^2)} \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right).$	✓	
C. La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	✓	
D. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'ensemble de définition.		✓

Corrigé

- A. **FAUX** – Il faut $x^2 > 0$ ($x \neq 0$) et $\ln(x^2) \neq 0$ ($x \neq \pm 1$) : l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ privé de $-1, 0$ et 1 , pas $]0 ; +\infty[$.
- B. **VRAI** – $1 + \frac{\ln(1/x^2 + 1)}{\ln x^2} = \frac{\ln x^2 + \ln \frac{1+x^2}{x^2}}{\ln x^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x^2} = f(x)$.
- C. **VRAI** – $f(-x) = f(x)$ (ne dépend que de x^2) : fonction paire, courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- D. **FAUX** – $f(x) = 0$ exige $\ln(x^2+1) = 0$ soit $x = 0$, exclu du domaine : aucune solution.

Question 9

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $] -1 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - (x+1)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}g(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .	✓	
B. la fonction g est croissante sur l'ensemble $] -1 ; +\infty[$.		✓
C. L'intégrale $\int_0^1 g(x) dx$ est positive.	✓	
D. La fonction F définie par : $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^{-x} = \frac{1-(x+1)e^{-x}}{x+1} = \frac{e^{-x}(e^x-(x+1))}{x+1} = \frac{e^{-x}}{x+1}g(x)$.
- B. **FAUX** – $g'(x) = e^x - 1 < 0$ sur $] -1 ; 0[$: g décroît puis croît, elle n'est pas croissante sur tout $] -1 ; +\infty[$.
- C. **VRAI** – $\int_0^1 g = [e^x - x^2/2 - x]_0^1 = e - \frac{3}{2} - 1 = e - 2,5 \approx 0,22 > 0$.
- D. **FAUX** – $F'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1 - e^{-x} = \ln(1+x) - e^{-x} \neq f(x)$ (signe de e^{-x}).

Question 10

Soient a et b deux réels, $f_{a,b}$ la fonction définie par : $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2 - 9}{x+b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -b$. On note par $C_{a,b}$ la courbe représentative de la fonction $f_{a,b}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si $a = 1$ la droite d'équation $y = x - b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $C_{a,b}$.	✓	
B. Il existe au moins une valeur de a telle que la courbe représentative $C_{a,b}$ admette une asymptote horizontale.	✓	
C. Si $a = 1$ et $b = 1$ la courbe représentative $C_{a,b}$ est tangente au point d'abscisse $x = 1$ à la droite D passant par les points $A(2 ; -1)$ et $B(3 ; 2)$	✓	
D. Si $a = -1$ et $b = 1$ la courbe représentative $C_{a,b}$ est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – Pour $a = 1$: $\frac{x^2-9}{x+b} = x - b + \frac{b^2-9}{x+b}$ et le reste tend vers 0 à l'infini : $y = x - b$ est asymptote oblique.
- B. **VRAI** – Pour $a = 0$, $f(x) = \frac{-9}{x+b} \rightarrow 0$: asymptote horizontale $y = 0$.
- C. **VRAI** – $a = b = 1$: $f(1) = -8/2 = -4$; D : pente 3, $y = 3x - 7$, passe par $(1; -4)$. $f'(x) = \frac{x^2+2x+9}{(x+1)^2}$, $f'(1) = 12/4 = 3 =$ pente de D : tangente.
- D. **VRAI** – Avec $a = -1$ et $b = 1$, $f(x) = (-x^2-9)/(x+1)$. La division donne $-x^2-9 = (x+1)(-x+1) - 10$, donc $f(x) = -x+1 - 10/(x+1)$. L'asymptote oblique est $y = -x+1$ et la position relative se lit sur $f(x) - (-x+1) = -10/(x+1)$, strictement négatif pour $x > -1$, donc au voisinage de $+\infty$: la courbe est bien EN DESSOUS de son asymptote. La passe 2 écrit $+8/(x+1)$: c'est une erreur de division, le reste vaut -10 et non $+8$ – on vérifie que $(x+1)(-x+1) - 10 = -x^2+1-10 = -x^2-9$, alors que $(x+1)(-x+1) + 8 = -x^2+9$ ne redonne pas le numérateur. Sa conclusion « au-dessus » repose donc sur un reste faux.

Question 11

On considère l'équation suivante (E) : $\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x} = x$, où $x \in \mathbb{R}$ et m est un paramètre réel donné et $m > 0$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si $-m \leq x \leq m$, l'équation (E) est bien définie.	✓	
B. Si $0 \leq x \leq m$, l'équation (E) est équivalente à l'équation suivante : $2\sqrt{m-x}\sqrt{m+x} = x^2 - 2m$.	✓	
C. Si $m = 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution.	✓	
D. Si $0 < m < 1$ alors l'équation (E) admet comme unique solution : $2\sqrt{1-m}$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Les racines exigent $m - x \geq 0$ et $m + x \geq 0$, soit $-m \leq x \leq m$.
- **B. VRAI** – Pour $0 \leq x \leq m$, les deux membres sont positifs et on peut élever au carré : $2m + 2\sqrt{m-x}\sqrt{m+x} = x^2$, soit $2\sqrt{m-x}\sqrt{m+x} = x^2 - 2m$; réciproquement si $x \geq 0$, l'équivalence tient.
- **C. VRAI** – En élevant encore au carré : $4(m^2 - x^2) = x^4 - 4mx^2 + 4m^2$ soit $x^2(x^2 - 4(m-1)) = 0$. Pour $m = 1$, seule $x = 0$, qui ne vérifie pas (E) ($2\sqrt{m} \neq 0$) : pas de solution.
- **D. FAUX** – Pour $0 < m < 1$, $x^2 = 4(m-1) < 0$ est impossible et $x = 0$ ne convient pas : aucune solution (de plus $2\sqrt{1-m}$ n'est même pas dans $[-m; m]$ en général). Une solution n'existe que pour $m \geq 2$.

Question 12

Soit la suite (u_n) de nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ vérifiée pour tout entier naturel n .

Soit (a_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$ et (b_n) la suite définie par :

$$b_n = a_n - \frac{1}{2}.$$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le premier terme a_0 de la suite (a_n) vaut 2.		✓
B. La suite (a_n) vérifie la relation : $a_{n+1} = 3a_n - 1$.	✓	
C. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 3.	✓	
D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – $u_0 = 2 = \frac{3a_0 - 1}{3a_0 - 2}$ donne $6a_0 - 4 = 3a_0 - 1$, soit $a_0 = 1$, pas 2.
- **B. VRAI** – De $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$ on tire $a_n = \frac{2u_n - 1}{3(u_n - 1)}$. Or $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ et $2u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n + 2}$, d'où $a_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1} = 3a_n - 1$.
- **C. VRAI** – $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3a_n - \frac{3}{2} = 3b_n$: géométrique de raison 3.
- **D. VRAI** – $b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n \rightarrow +\infty$, donc $a_n \rightarrow +\infty$ et $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2} \rightarrow 1$ (vérifié numériquement : $u_{1000} \approx 1,000$).

Question 13

Avant l'examen de fin d'année, les étudiants passent deux tests successivement. Les $\frac{3}{4}$ réussissent le premier test. La probabilité de réussir le deuxième test est de 0,7 si le premier a été réussi et de 0,3 si le premier a été raté.

L'expérience des années précédentes permet d'affirmer que :

- 80 % des étudiants qui échouent aux deux tests ratent l'examen de fin d'année ;
- 60 % des étudiants qui réussissent l'un des deux tests réussissent l'examen de fin d'année ;
- 95 % des étudiants réussissant les deux tests réussissent l'examen de fin d'année.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité qu'un étudiant réussisse le deuxième test est 3/40.		✓
B. La probabilité qu'un étudiant réussisse les deux tests est 21/40.	✓	
C. Si un étudiant réussit le deuxième test la probabilité qu'il ait réussi le premier test est 7/8.	✓	
D. Le taux prévisible de succès à l'examen de fin d'année est 62 %.		✓

Corrigé

- A. FAUX – $P(T_2) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,525 + 0,075 = 0,6 = 24/40$, pas 3/40.
- B. VRAI – $P(T_1 \cap T_2) = 0,75 \cdot 0,7 = 0,525 = 21/40$.
- C. VRAI – $P(T_1 | T_2) = 0,525/0,6 = 0,875 = 7/8$.
- D. FAUX – $P(\text{deux échecs}) = 0,25 \cdot 0,7 = 0,175$; $P(\text{exactement un réussi}) = 0,75 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,3$; $P(\text{deux réussis}) = 0,525$. Taux = $0,175 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,525 \cdot 0,95 = 0,71375 \approx 71,4 \%$, pas 62 % (même en lisant « l'un des deux » comme « au moins un » on obtient 53 %).

Question 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ et F sa courbe représentative.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels privé de -1 et 1 .	✓	
B. La fonction f est impaire, x appartenant à l'ensemble de définition.	✓	
C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.		✓
D. La droite D d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe F quand x tend vers $+\infty$.	✓	

Corrigé

- A. VRAI – Il faut $\frac{1+x}{1-x}$ défini et non nul : $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Domaine = $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
- B. VRAI – $f(-x) = x^2 \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = -x^2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = -f(x)$, domaine symétrique : f impaire.
- C. FAUX – Quand $x \rightarrow 1$, $x^2 \rightarrow 1$ et $\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$, pas 0.
- D. VRAI – Pour $x > 1$, avec $t = 1/x$: $\ln \frac{1+t}{1-t} = 2t + \frac{2t^3}{3} + \dots$, donc $f(x) = 2x + \frac{2}{3x} + \dots$ et $f(x) - 2x \rightarrow 0$: $y = 2x$ est asymptote en $+\infty$.

Question 15

Soit la fonction f définie sur $[-3 ; 1]$ par $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$ et g définie par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La fonction dérivée $f'(x)$ est égale à $\frac{e^x g(x)}{e^x + 1}$.		✓
B. Il existe un seul réel a , $-2 < a < 1$, tel que $g(a) = 0$	✓	
C. Si $g(a) = 0$ avec $-2 < a < 1$, alors $f(a) = a$.		✓
D. $\int_{-2}^{-1} x \frac{e^x}{e^x + 1} dx = -\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + 2\ln\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx$.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – $f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$: le dénominateur est au carré, pas simple.
- **B. VRAI** – $g'(x) = e^x + 1 > 0$: g strictement croissante; $g(-2) = e^{-2} - 1 < 0$ et $g(1) = e + 2 > 0$: une unique racine a dans $]-2; 1[$.
- **C. FAUX** – $g(a) = 0$ donne $e^a = -a - 1$, donc $f(a) = \frac{a(-a-1)}{-a} = a + 1 \neq a$.
- **D. VRAI** – Intégration par parties avec $u = x$ et $v = \ln(1 + e^x)$ ($v' = e^x/(e^x + 1)$) : $[x \ln(1 + e^x)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx = -\ln(1 + e^{-1}) + 2\ln(1 + e^{-2}) - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx$.

Question 16

400 sportifs sont inscrits dans un club de sport : 240 jouent au football; 120 jouent au tennis; 80 ne font ni l'un ni l'autre.

On désigne par F l'évènement (tirer au sort un inscrit dans le club qui joue au football), T l'évènement (tirer au sort un inscrit dans le club qui joue au tennis) et l'évènement $F \cap T$ veut dire (tirer au sort un sportif inscrit dans le club qui joue au football et au tennis.)

On donne $P(F \cap T) = 0,10$.

On tire au hasard un inscrit.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La probabilité qu'il joue au football est 0,6.	✓	
B. La probabilité qu'il ne pratique ni le football ni le tennis est 0,20.	✓	
C. La probabilité de tirer au sort un sportif qui joue au football ou au tennis est 0,10.		✓
D. On tire au hasard un joueur de tennis, la probabilité qu'il joue au football est 0,10.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – $P(F) = 240/400 = 0,6$.
- **B. VRAI** – $80/400 = 0,20$.
- **C. FAUX** – $P(F \cup T) = 0,6 + 0,3 - 0,1 = 0,8 (= 320/400)$, pas 0,10.
- **D. FAUX** – $P(F | T) = P(F \cap T)/P(T) = 0,10/0,30 = 1/3$, pas 0,10.

Question 17

Soit le système S de trois équations où x , y sont deux inconnues réelles et a un paramètre réel.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \\ x + 2y = a - 1 \end{cases}$$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si $a = \frac{1}{2}$ alors le système S n'a pas de solution.	✓	
B. Si $a \neq \frac{1}{2}$ alors le système S admet une infinité de solutions.		✓
C. Si a est égal à 1, 2 ou -2 , le système S admet une solution unique.	✓	
D. Si $a = 1$, le système S admet comme solution le couple $(2; -1)$.	✓	

Corrigé

- A. **VRAI** – Pour $a \neq \pm 1$, les deux premières équations donnent $x = y = 1/(a+1)$; la troisième impose $3/(a+1) = a - 1$, soit $a^2 = 4$. Pour $a = 1/2$, incompatible : pas de solution.
- B. **FAUX** – Le système n'a jamais une infinité de solutions : les deux premières équations sont indépendantes sauf $a = \pm 1$ ($a = 1$ donne $x + y = 1$ puis avec la 3e une solution unique, $a = -1$ est incompatible).
- C. **VRAI** – $a = 1$: $x + y = 1$ et $x + 2y = 0$ donnent $(2; -1)$, unique. $a = \pm 2$: $x = y = 1/(a+1)$ vérifie la 3e ($a^2 = 4$), unique.
- D. **VRAI** – $a = 1$: $y = -1$, $x = 2$, et $2 - 2 = 0 = a - 1$. Solution $(2; -1)$.

Question 18

Dans un plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D passant par le point $M(0; 3,5)$ et de pente 2, G la courbe représentative d'une fonction f d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$

Affirmation	VRAI	FAUX
A. $f(0) = 3,5$.	✓	
B. La droite D coupe la courbe G au point $N(2; 7,5)$.	✓	
C. Le nombre dérivé de f au point M vaut 1.	✓	
D. La tangente passant par le point $N(2; 7,5)$ à la courbe G est parallèle à la droite D .		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $f(0) = 7/2 = 3,5$.
- B. **VRAI** – $D : y = 2x + 3,5$. Intersection : $x^2/2 + x + 3,5 = 2x + 3,5 \Rightarrow x(x - 2)/2 = 0$, $x = 0$ ou 2 ; $f(2) = 2 + 2 + 3,5 = 7,5$: $N(2; 7,5)$ est bien un point d'intersection.
- C. **VRAI** – $f'(x) = x + 1$, et $M(0; 3,5)$ est sur G : $f'(0) = 1$.
- D. **FAUX** – $f'(2) = 3 \neq 2$ (pente de D) : la tangente en N n'est pas parallèle à D .

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes

Un restaurateur néophyte veut ouvrir un restaurant. Plusieurs possibilités s'offrent à lui. Il peut ouvrir un restaurant offrant une cuisine chinoise ou un restaurant offrant une cuisine italienne. Cet établissement peut être implanté en centre ville ou non. Quelle que soit la cuisine proposée, le restaurant peut être aménagé ou non pour offrir un cadre typique associé à la cuisine proposée (décor, musique, ambiance, ...).

Ne connaissant pas a priori la formule qui serait susceptible d'intéresser un maximum de personnes, il décide de faire appel à un ami pour réaliser une enquête auprès du public.

On vous communique ci-dessous le questionnaire utilisé ainsi que les résultats obtenus. Toutes les personnes interrogées ont répondu à toutes les questions.

Questionnaire :

- Aimez-vous la cuisine chinoise ? OUI / NON
- Aimez-vous la cuisine italienne ? OUI / NON
- Préférez-vous un restaurant au cadre typique ? OUI / NON
- Préférez-vous un restaurant en centre ville ? OUI / NON

Le dépouillement de cette enquête a permis d'établir les résultats suivants :

- Parmi les personnes interrogées, personne n'aime à la fois la cuisine italienne et la cuisine chinoise.
- 51 personnes aiment la cuisine chinoise. 3 d'entre-elles souhaitent un cadre non-typique et hors du centre ville.
- 60 personnes aiment la cuisine italienne. 5 d'entre-elles souhaitent un cadre non-typique et hors du centre ville.
- 103 personnes préfèrent un cadre typique. 12 parmi celles-ci ne veulent ni cuisine chinoise, ni cuisine italienne et surtout pas de restaurant en centre ville. 45 parmi les 103 préfèrent en plus du cadre typique, un restaurant italien. 33 parmi les 103 préfèrent en plus du cadre typique, un restaurant chinois.
- 92 personnes souhaitent un restaurant en centre ville dont 37 qui préfèrent la cuisine chinoise et 35 la cuisine italienne. Parmi ces 92 personnes, 7 ne veulent ni cuisine chinoise, ni cuisine italienne, ni cadre typique.
- Parmi les personnes interrogées, aucune n'a souhaité un restaurant hors centre ville, au cadre non typique et qui ne propose ni cuisine italienne ni cuisine chinoise.

Question 19

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. 11 personnes préfèrent un restaurant chinois au cadre typique hors du centre ville.	✓	
B. 25 personnes préfèrent un restaurant chinois au cadre non typique en centre ville.		✓
C. 10 personnes préfèrent un restaurant italien au cadre non typique en centre ville.	✓	
D. 25 personnes préfèrent un restaurant italien au cadre typique hors du centre ville.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Chinois : 51 au total, 33 typiques donc 18 non typiques, dont 3 hors centre $\Rightarrow$ 15 non typique en centre ; 37 en centre $\Rightarrow$ $37 - 15 = 22$ typique en centre ; $33 - 22 = 11$ typique hors centre.
- **B. FAUX** – Chinois, non typique, centre ville : 15 personnes, pas 25.
- **C. VRAI** – Italien : 60 au total, 45 typiques donc 15 non typiques, dont 5 hors centre $\Rightarrow$ 10 non typique en centre ville.
- **D. FAUX** – Italien en centre : 35, dont 10 non typique $\Rightarrow$ 25 typique en centre ; typique hors centre = $45 - 25 = 20$, pas 25.

Question 20

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Plus de 130 personnes ont été interrogées.	✓	
B. Plus de 20 % des personnes interrogées n'aiment ni la cuisine chinoise, ni la cuisine italienne.	✓	
C. Parmi les 8 possibilités d'ouverture de restaurant, la moins plébiscitée représente moins de 3 % des personnes interrogées.	✓	
D. En admettant que l'ensemble de la population ait des goûts similaires à l'échantillon de personnes interrogées, il doit ouvrir un restaurant chinois au cadre typique en centre ville.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Ni chinois ni italien : $103 - 45 - 33 = 25$ typiques (12 hors centre, 13 en centre) + 7 non typique en centre + 0 = 32. Total = $51 + 60 + 32 = 143 > 130$.
- **B. VRAI** – $32/143 \approx 22,4 \% > 20 \%$.
- **C. VRAI** – La moins choisie des 8 formules est chinois, non typique, hors centre : 3 personnes, $3/143 \approx 2,1 \% < 3 \%$.
- **D. FAUX** – Italien typique en centre ville : 25 personnes, contre 22 pour chinois typique en centre ville : il doit ouvrir un italien.

Sans tenir compte des résultats de l'enquête menée précédemment, le restaurateur décide d'ouvrir un restaurant italien et de proposer uniquement deux types de plat : des lasagnes et des spaghettis sauce bolognaise.

Les ingrédients pour préparer des lasagnes et des spaghettis sauce bolognaise sont de la pâte et de la sauce à la viande. Pour faire des spaghettis sauce bolognaise, il faut deux fois plus de pâte que de sauce à la viande (ex : pour 1 kg de pâte, il faut 500 g de sauce). Un plat de lasagnes nécessite deux fois plus de sauce à la viande que de pâte.

Le chef a commandé à ses fournisseurs 15 kilogrammes de sauce à la viande et 15 kilogrammes de pâte.

Question 21

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si le chef ne prépare que des spaghettis sauce bolognaise, il lui restera exactement 7 kg de sauce à la viande.		✓
B. Si le chef prépare 9 kg de spaghettis sauce bolognaise, il pourra encore préparer 18 kg de lasagnes et 2 kg de pâte ne seront pas utilisés.		✓
C. Si le chef prépare 15 kg de lasagne, il pourra encore également préparer une certaine quantité de spaghettis sauce bolognaise et utiliser complètement l'ensemble des ingrédients commandés.	✓	
D. Il n'existe qu'une seule combinaison (poids de spaghettis sauce bolognaise - poids de lasagnes) qui permette d'utiliser tous les ingrédients commandés	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – 1 kg de spaghettis = $\frac{2}{3}$ kg de pâte + $\frac{1}{3}$ kg de sauce. Avec 15 kg de pâte on fait 22,5 kg de spaghettis consommant 7,5 kg de sauce : il reste 7,5 kg, pas exactement 7.

- **B. FAUX** – 9 kg de spaghettis = 6 kg de pâte + 3 kg de sauce; reste 9 kg de pâte et 12 kg de sauce. Les lasagnes (1/3 pâte, 2/3 sauce) sont limitées par la sauce : 18 kg de lasagnes utilisant 6 kg de pâte, il reste 3 kg de pâte, pas 2.
- **C. VRAI** – 15 kg de lasagnes = 5 kg de pâte + 10 kg de sauce; reste 10 kg de pâte et 5 kg de sauce, exactement 15 kg de spaghettis : tout est utilisé.
- **D. VRAI** – Le système $(2/3)S + (1/3)L = 15$, $(1/3)S + (2/3)L = 15$ a l'unique solution $S = L = 15$.

Un jour donné, la livraison est de x kilogrammes de pâte et y kilogrammes de sauce.

Notons :

- S , le nombre de kilogrammes de spaghettis sauce bolognaise préparés par le chef;
- L , le nombre de kilogrammes de lasagnes préparées par le chef. Sachant qu'il faut 200 grammes de pâte pour faire une assiette de spaghettis sauce bolognaise et 200 grammes de sauce pour faire une assiette de lasagnes, notons :
- σ , le nombre d'assiettes de spaghettis sauce bolognaise préparées par le chef;
- λ , le nombre d'assiettes de lasagnes préparées par le chef.

Une assiette de spaghettis sauce bolognaise est vendue 7 € et une assiette de lasagnes est vendue 9 €.

Question 22

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. La quantité de pâte utilisée sera égale à $\frac{1}{3}S + \frac{2}{3}L$.		✓
B. Si tous les ingrédients sont utilisés alors $S = 2x - y$.	✓	
C. Si tous les ingrédients sont utilisés alors $\sigma = \frac{20}{3}x + \frac{10}{3}y$.		✓
D. Si le chef utilise tous les ingrédients et vend tous les plats, le chiffre d'affaires sera de $\frac{50}{3}x + \frac{110}{3}y$ €.	✓	

Corrigé

- **A. FAUX** – Pâte utilisée = $(2/3)S + (1/3)L$ (les spaghettis contiennent 2/3 de pâte), l'affirmation inverse les coefficients.
- **B. VRAI** – $(2/3)S + (1/3)L = x$ et $(1/3)S + (2/3)L = y$; $2 \times (1re) - (2e)$ donne $S = 2x - y$ (et $L = 2y - x$).
- **C. FAUX** – $\sigma = S/0,2 = 5S = 10x - 5y$, pas $(20/3)x + (10/3)y$.
- **D. VRAI** – Le tapuscrit a perdu les proportions données à la question précédente du sujet, mais elles se reconstituent sans ambiguïté : 1 kg de spaghettis bolognaise = 2/3 de pâte + 1/3 de sauce, 1 kg de lasagnes = 1/3 de pâte + 2/3 de sauce (seule lecture qui rend l'affirmation B vraie et qui soit compatible avec les 200 g par assiette). On a alors $x = 2S/3 + L/3$ et $y = S/3 + 2L/3$, d'où $S = 2x - y$ et $L = 2y - x$. Une assiette de spaghettis contient 200 g de pâte, donc pèse $0,2/(2/3) = 0,3$ kg : $\sigma = (2S/3)/0,2 = 10S/3 = (20x - 10y)/3$. De même une assiette de lasagnes contient 200 g de sauce : $\lambda = (2L/3)/0,2 = 10L/3 = (20y - 10x)/3$. Chiffre d'affaires = $7\sigma + 9\lambda = (140x - 70y)/3 + (180y - 90x)/3 = (50x + 110y)/3$, exactement ce qu'annonce D : VRAI. La passe 2 prend $\sigma = S/0,2 = 5S$ et $\lambda = 5L$, c'est-à-dire suppose qu'une assiette est faite uniquement de pâte (ou uniquement de sauce), ce qui contredit sa propre résolution de A et B; elle obtient $25x + 55y$, soit exactement 3/2 fois la bonne valeur.

Dans un souci d'éviter l'attente du client, le restaurateur décide d'étudier plus précisément l'affluence de sa clientèle en fonction du temps, dans l'heure qui suit l'ouverture.

Pour ce faire, il compte toutes les 2 minutes les commandes enregistrées. Nous ne parlerons plus que de pointages (1^{er} pointage = 2 min. après l'ouverture, 2^e pointage = 4 min. après l'ouverture, ...).

D'après cette étude, il en déduit qu'à partir de l'ouverture du restaurant, l'évolution du nombre de plats commandés dans un laps de temps de 2 minutes peut être approximé comme suit :

$y = 0,5x$, avec y étant le nombre de plats commandés dans les 2 minutes précédentes et x le numéro du pointage (1, 2, 3, ...).

Comme vous pouvez le remarquer, nous avons rendu cette fonction continue dans un but de simplification de l'analyse.

Connaissant maintenant parfaitement l'évolution des commandes, il décide de s'intéresser au nombre de plats pouvant être préparés en cuisine. Il remarque que le nombre de plats préparés dépend logiquement du nombre de cuisiniers mais également de la période à laquelle on se réfère. Il mène une étude sur la production en cuisine en fonction du temps (même méthode de pointage toutes les 2 minutes) et du nombre de cuisiniers. Il en déduit la fonction suivante :

$$z = n \times \sqrt[n+1]{x} = n \times x^{\frac{1}{n+1}}$$

avec z nombre de plats préparés dans les 2 minutes précédentes, n le nombre de cuisiniers présents et x le numéro du pointage (1, 2, 3, ...).

Question 23

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Au 5 ^e pointage, au moins 4 plats ont été commandés dans les 4 minutes qui précèdent.	✓	
B. De l'ouverture au 24 ^e pointage, plus de 200 plats ont été commandés.		✓
C. Au 16 ^e pointage, si 3 cuisiniers sont présents, 6 plats seront préparés dans les 2 minutes précédentes.	✓	
D. De l'ouverture au 16 ^e pointage, si 3 cuisiniers sont présents, ils prépareront plus de 50 plats.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Les 4 minutes précédant le 5^e pointage couvrent les pointages 4 et 5 : $0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 5 = 4,5 \geq 4$ (en continu, $\int_3^5 0,5x \, dx = 4$, également au moins 4).
- **B. FAUX** – Somme des 24 pointages : $0,5 \cdot (1 + \dots + 24) = 0,5 \cdot 300 = 150$ (en continu $\int_0^{24} 0,5x \, dx = 144$) : moins de 200.
- **C. VRAI** – $z = 3 \cdot 16^{1/4} = 3 \cdot 2 = 6$ plats.
- **D. VRAI** – $\sum_{x=1}^{16} 3x^{1/4} \approx 78,8$ (en continu $\int_0^{16} 3x^{1/4} \, dx = 76,8$) : plus de 50 plats.

Question 24

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si un seul cuisinier travaille, à partir du 5 ^e pointage, il ne pourra plus faire face aux commandes car dans les 2 minutes précédentes, le nombre de plats commandés sera supérieur au nombre de plats qu'il puisse préparer.	✓	
B. Si 2 cuisiniers travaillent, dès le 11 ^e pointage, ils ne pourront plus faire face aux commandes car dans les 2 minutes précédentes, le nombre de plats commandés sera supérieur au nombre de plats qu'ils puissent préparer.		✓
C. En supposant n cuisiniers présents, ils ne pourront plus faire face à partir du pointage $x = \sqrt[n]{2n^{n+1}} = (2n^{n+1})^{\frac{1}{n}}.$		✓
D. Lors de l'ouverture du restaurant, tous les cuisiniers sont présents en cuisine mais un seul d'entre eux est chargé de la préparation des plats (car un seul suffit), les autres s'affairent à d'autres tâches. Dès que le premier ouvrier ne peut plus faire face aux commandes, il sera épaulé par un second qui délaissera sa tâche pour se consacrer également à la préparation des plats. On prendra pour principe, que le second cuisinier épaulé le premier juste avant la saturation de celui-ci, c'est-à-dire au pointage qui précède le moment où il sera débordé. Quand ceux-ci ne pourront plus faire face aux commandes prises, un troisième les rejoindra (dès le pointage précédent le moment où les deux seront débordés) et ainsi de suite pour les cuisiniers suivants. Quand plusieurs cuisiniers travaillent ensemble, ils effectuent chacun la même quantité de travail (ex : si 2 sont présents et 5 plats sont commandés, ils prépareront chacun 2,5 plats). À partir des informations précédentes, on peut conclure que : De l'ouverture au 10 ^e pointage, le premier cuisinier présent préparera un total de 13 plats.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** — $n = 1$: $0,5x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x > 4$. Au 5^e pointage, 2,5 commandés contre $\sqrt{5} \approx 2,24$ préparables : débordé à partir du 5^e pointage.
- **B. FAUX** — $n = 2$: $0,5x > 2x^{1/3} \Leftrightarrow x^{2/3} > 4 \Leftrightarrow x > 8$. Ils sont débordés dès le 9^e pointage ($4,5 > 2 \cdot 9^{1/3} \approx 4,16$), pas seulement à partir du 11^e.
- **C. FAUX** — $0,5x > n \cdot x^{1/(n+1)} \Leftrightarrow x^{n/(n+1)} > 2n \Leftrightarrow x > (2n)^{(n+1)/n}$. La formule proposée $(2n^{n+1})^{1/n} = 2^{1/n} n^{(n+1)/n}$ diffère du seuil correct $2^{(n+1)/n} n^{(n+1)/n}$ d'un facteur 2 : pour $n = 1$ elle donne 2 alors que le seuil est 4.
- **D. VRAI** — Cuisinier 1 seul aux pointages 1 à 3 (le 2^e arrive au pointage 4, celui qui précède le 5^e) : $0,5 + 1 + 1,5 = 3$ plats. Deux cuisiniers aux pointages 4 à 7 (le 3^e arrive au 8^e, précédant le 9^e) : $(2 + 2,5 + 3 + 3,5)/2 = 5,5$. Trois cuisiniers aux pointages 8 à 10 (seuil de 3 cuisiniers : $x > 6^{4/3} \approx 10,9$, donc pas débordés avant le 11^e) : $(4 + 4,5 + 5)/3 = 4,5$. Total $3 + 5,5 + 4,5 = 13$ plats.