

Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes

Un restaurateur néophyte veut ouvrir un restaurant. Plusieurs possibilités s'offrent à lui. Il peut ouvrir un restaurant offrant une cuisine chinoise ou un restaurant offrant une cuisine italienne. Cet établissement peut être implanté en centre ville ou non. Quelle que soit la cuisine proposée, le restaurant peut être aménagé ou non pour offrir un cadre typique associé à la cuisine proposée (décor, musique, ambiance, ...).

Ne connaissant pas a priori la formule qui serait susceptible d'intéresser un maximum de personnes, il décide de faire appel à un ami pour réaliser une enquête auprès du public.

On vous communique ci-dessous le questionnaire utilisé ainsi que les résultats obtenus. Toutes les personnes interrogées ont répondu à toutes les questions.

Questionnaire :

- Aimez-vous la cuisine chinoise ? OUI / NON
- Aimez-vous la cuisine italienne ? OUI / NON
- Préférez-vous un restaurant au cadre typique ? OUI / NON
- Préférez-vous un restaurant en centre ville ? OUI / NON

Le dépouillement de cette enquête a permis d'établir les résultats suivants :

- Parmi les personnes interrogées, personne n'aime à la fois la cuisine italienne et la cuisine chinoise.
- 51 personnes aiment la cuisine chinoise. 3 d'entre-elles souhaitent un cadre non-typique et hors du centre ville.
- 60 personnes aiment la cuisine italienne. 5 d'entre-elles souhaitent un cadre non-typique et hors du centre ville.
- 103 personnes préfèrent un cadre typique. 12 parmi celles-ci ne veulent ni cuisine chinoise, ni cuisine italienne et surtout pas de restaurant en centre ville. 45 parmi les 103 préfèrent en plus du cadre typique, un restaurant italien. 33 parmi les 103 préfèrent en plus du cadre typique, un restaurant chinois.
- 92 personnes souhaitent un restaurant en centre ville dont 37 qui préfèrent la cuisine chinoise et 35 la cuisine italienne. Parmi ces 92 personnes, 7 ne veulent ni cuisine chinoise, ni cuisine italienne, ni cadre typique.
- Parmi les personnes interrogées, aucune n'a souhaité un restaurant hors centre ville, au cadre non typique et qui ne propose ni cuisine italienne ni cuisine chinoise.

Question 24

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si un seul cuisinier travaille, à partir du 5 ^e pointage, il ne pourra plus faire face aux commandes car dans les 2 minutes précédentes, le nombre de plats commandés sera supérieur au nombre de plats qu'il puisse préparer.	✓	
B. Si 2 cuisiniers travaillent, dès le 11 ^e pointage, ils ne pourront plus faire face aux commandes car dans les 2 minutes précédentes, le nombre de plats commandés sera supérieur au nombre de plats qu'ils puissent préparer.		✓
C. En supposant n cuisiniers présents, ils ne pourront plus faire face à partir du pointage $x = \sqrt[n]{2n^{n+1}} = (2n^{n+1})^{\frac{1}{n}}.$		✓
D. Lors de l'ouverture du restaurant, tous les cuisiniers sont présents en cuisine mais un seul d'entre eux est chargé de la préparation des plats (car un seul suffit), les autres s'affairent à d'autres tâches. Dès que le premier ouvrier ne peut plus faire face aux commandes, il sera épaulé par un second qui délaissera sa tâche pour se consacrer également à la préparation des plats. On prendra pour principe, que le second cuisinier épaulé le premier juste avant la saturation de celui-ci, c'est-à-dire au pointage qui précède le moment où il sera débordé. Quand ceux-ci ne pourront plus faire face aux commandes prises, un troisième les rejoindra (dès le pointage précédent le moment où les deux seront débordés) et ainsi de suite pour les cuisiniers suivants. Quand plusieurs cuisiniers travaillent ensemble, ils effectuent chacun la même quantité de travail (ex : si 2 sont présents et 5 plats sont commandés, ils prépareront chacun 2,5 plats). À partir des informations précédentes, on peut conclure que : De l'ouverture au 10 ^e pointage, le premier cuisinier présent préparera un total de 13 plats.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** — $n = 1$: $0,5x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x > 4$. Au 5^e pointage, 2,5 commandés contre $\sqrt{5} \approx 2,24$ préparables : débordé à partir du 5^e pointage.
- **B. FAUX** — $n = 2$: $0,5x > 2x^{1/3} \Leftrightarrow x^{2/3} > 4 \Leftrightarrow x > 8$. Ils sont débordés dès le 9^e pointage ($4,5 > 2 \cdot 9^{1/3} \approx 4,16$), pas seulement à partir du 11^e.
- **C. FAUX** — $0,5x > n \cdot x^{1/(n+1)} \Leftrightarrow x^{n/(n+1)} > 2n \Leftrightarrow x > (2n)^{(n+1)/n}$. La formule proposée $(2n^{n+1})^{1/n} = 2^{1/n} n^{(n+1)/n}$ diffère du seuil correct $2^{(n+1)/n} n^{(n+1)/n}$ d'un facteur 2 : pour $n = 1$ elle donne 2 alors que le seuil est 4.
- **D. VRAI** — Cuisinier 1 seul aux pointages 1 à 3 (le 2^e arrive au pointage 4, celui qui précède le 5^e) : $0,5 + 1 + 1,5 = 3$ plats. Deux cuisiniers aux pointages 4 à 7 (le 3^e arrive au 8^e, précédant le 9^e) : $(2 + 2,5 + 3 + 3,5)/2 = 5,5$. Trois cuisiniers aux pointages 8 à 10 (seuil de 3 cuisiniers : $x > 6^{4/3} \approx 10,9$, donc pas débordés avant le 11^e) : $(4 + 4,5 + 5)/3 = 4,5$. Total $3 + 5,5 + 4,5 = 13$ plats.