

## Mathématiques

### Question 15

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-3 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$  et  $g$  définie par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

| Affirmation                                                                                                                                              | VRAI | FAUX |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|
| A. La fonction dérivée $f'(x)$ est égale à $\frac{e^x g(x)}{e^x + 1}$ .                                                                                  |      | ✓    |
| B. Il existe un seul réel $a$ , $-2 < a < 1$ , tel que $g(a) = 0$                                                                                        | ✓    |      |
| C. Si $g(a) = 0$ avec $-2 < a < 1$ , alors $f(a) = a$ .                                                                                                  |      | ✓    |
| D. $\int_{-2}^{-1} x \frac{e^x}{e^x + 1} dx = -\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + 2 \ln\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx$ . | ✓    |      |

### Corrigé

- **A. FAUX** –  $f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(e^x + 1) - x e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$  : le dénominateur est au carré, pas simple.
- **B. VRAI** –  $g'(x) = e^x + 1 > 0$  :  $g$  strictement croissante;  $g(-2) = e^{-2} - 1 < 0$  et  $g(1) = e + 2 > 0$  : une unique racine  $a$  dans  $]-2; 1[$ .
- **C. FAUX** –  $g(a) = 0$  donne  $e^a = -a - 1$ , donc  $f(a) = \frac{a(-a-1)}{-a} = a + 1 \neq a$ .
- **D. VRAI** – Intégration par parties avec  $u = x$  et  $v = \ln(1 + e^x)$  ( $v' = e^x/(e^x + 1)$ ) :  $[x \ln(1 + e^x)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx = -\ln(1 + e^{-1}) + 2 \ln(1 + e^{-2}) - \int_{-2}^{-1} \ln(1 + e^x) dx$ .