

Mathématiques

Question 12

Soit la suite (u_n) de nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ vérifiée pour tout entier naturel n .

Soit (a_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$ et (b_n) la suite définie par : $b_n = a_n - \frac{1}{2}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Le premier terme a_0 de la suite (a_n) vaut 2.		✓
B. La suite (a_n) vérifie la relation : $a_{n+1} = 3a_n - 1$.	✓	
C. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 3.	✓	
D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.	✓	

Corrigé

- A. **FAUX** – $u_0 = 2 = \frac{3a_0 - 1}{3a_0 - 2}$ donne $6a_0 - 4 = 3a_0 - 1$, soit $a_0 = 1$, pas 2.
- B. **VRAI** – De $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$ on tire $a_n = \frac{2u_n - 1}{3(u_n - 1)}$. Or $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ et $2u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n + 2}$, d'où $a_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1} = 3a_n - 1$.
- C. **VRAI** – $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3a_n - \frac{3}{2} = 3b_n$: géométrique de raison 3.
- D. **VRAI** – $b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n \rightarrow +\infty$, donc $a_n \rightarrow +\infty$ et $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2} \rightarrow 1$ (vérifié numériquement : $u_{1000} \approx 1,000$).