

Mathématiques

Question 10

Soient a et b deux réels, $f_{a,b}$ la fonction définie par : $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2 - 9}{x + b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -b$. On note par $C_{a,b}$ la courbe représentative de la fonction $f_{a,b}$.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Si $a = 1$ la droite d'équation $y = x - b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $C_{a,b}$.	✓	
B. Il existe au moins une valeur de a telle que la courbe représentative $C_{a,b}$ admette une asymptote horizontale.	✓	
C. Si $a = 1$ et $b = 1$ la courbe représentative $C_{a,b}$ est tangente au point d'abscisse $x = 1$ à la droite D passant par les points $A(2; -1)$ et $B(3; 2)$	✓	
D. Si $a = -1$ et $b = 1$ la courbe représentative $C_{a,b}$ est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.	✓	

Corrigé

- **A. VRAI** – Pour $a = 1$: $\frac{x^2-9}{x+b} = x - b + \frac{b^2-9}{x+b}$ et le reste tend vers 0 à l'infini : $y = x - b$ est asymptote oblique.
- **B. VRAI** – Pour $a = 0$, $f(x) = \frac{-9}{x+b} \rightarrow 0$: asymptote horizontale $y = 0$.
- **C. VRAI** – $a = b = 1$: $f(1) = -8/2 = -4$; D : pente 3, $y = 3x - 7$, passe par $(1; -4)$. $f'(x) = \frac{x^2+2x+9}{(x+1)^2}$, $f'(1) = 12/4 = 3$ = pente de D : tangente.
- **D. VRAI** – Avec $a = -1$ et $b = 1$, $f(x) = (-x^2-9)/(x+1)$. La division donne $-x^2-9 = (x+1)(-x+1) - 10$, donc $f(x) = -x+1 - 10/(x+1)$. L'asymptote oblique est $y = -x+1$ et la position relative se lit sur $f(x) - (-x+1) = -10/(x+1)$, strictement négatif pour $x > -1$, donc au voisinage de $+\infty$: la courbe est bien EN DESSOUS de son asymptote. La passe 2 écrit $+8/(x+1)$: c'est une erreur de division, le reste vaut -10 et non $+8$ – on vérifie que $(x+1)(-x+1) - 10 = -x^2+1-10 = -x^2-9$, alors que $(x+1)(-x+1) + 8 = -x^2+9$ ne redonne pas le numérateur. Sa conclusion « au-dessus » repose donc sur un reste faux.