

Mathématiques

Question 9

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $] -1 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - (x+1)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}g(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .	✓	
B. la fonction g est croissante sur l'ensemble $] -1 ; +\infty[$.		✓
C. L'intégrale $\int_0^1 g(x) dx$ est positive.	✓	
D. La fonction F définie par : $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .		✓

Corrigé

- A. **VRAI** – $f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^{-x} = \frac{1-(x+1)e^{-x}}{x+1} = \frac{e^{-x}(e^x-(x+1))}{x+1} = \frac{e^{-x}}{x+1}g(x)$.
- B. **FAUX** – $g'(x) = e^x - 1 < 0$ sur $] -1 ; 0[$: g décroît puis croît, elle n'est pas croissante sur tout $] -1 ; +\infty[$.
- C. **VRAI** – $\int_0^1 g = [e^x - x^2/2 - x]_0^1 = e - \frac{3}{2} - 1 = e - 2,5 \approx 0,22 > 0$.
- D. **FAUX** – $F'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1 - e^{-x} = \ln(1+x) - e^{-x} \neq f(x)$ (signe de e^{-x}).