

pondération 2

Question 17

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Affirmation	VRAI	FAUX
A. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $]0 ; +\infty[$.	✓	
B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.		✓
C. Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f $f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ où f' est la fonction dérivée de f .	✓	
D. La fonction f atteint son maximum pour $x = 1$.		✓

Corrigé

- **A. VRAI** – Le numérateur $1 + \sqrt{1 + x^2}$ est toujours strictement positif, l'argument du $\ln$ est strictement positif si et seulement si $x > 0$.
- **B. FAUX** – $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \sim \frac{x}{x} \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$.
- **C. VRAI** – $f = \ln(1 + s) - \ln x$ avec $s = \sqrt{1 + x^2}$, $s' = x/s$: $f' = \frac{x}{s(1 + s)} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - s - s^2}{xs(1 + s)} = \frac{-(1 + s)}{xs(1 + s)} = \frac{-1}{x\sqrt{1 + x^2}}$.
- **D. FAUX** – $f' < 0$ sur $]0 ; +\infty[$: f est strictement décroissante et n'a pas de maximum.