

A – Première étude des trois types de flacons

1) Étude des volumes des différents flacons

Remarque préalable

Ce n'est pas dit explicitement dans l'énoncé, mais on considérera que pour la forme du premier flacon, le parallélépipède est rectangle, et que pour celle du second flacon, le cylindre est droit.

1) a) Volume du flacon de forme parallélépipédique

Si l'on prend comme base de ce flacon de forme parallélépipédique, le rectangle dont les dimensions sont la longueur et la largeur utiles, on obtient comme aire de la base : $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$

La hauteur utile étant de 6 cm, le volume V de ce flacon est :

$$V = 15 \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^3.$$

Le volume du flacon de forme parallélépipédique est de 90 cm^3 .

Remarque

La formule donnée par l'énoncé est la formule générale donnant le volume d'un prisme, famille à laquelle appartiennent les parallélépipèdes rectangles.

On pouvait aussi procéder en une seule étape en utilisant la formule classique spécifique à ces solides :

$$\text{Volume d'un parallélépipède rectangle} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

1) b) Volume du flacon de forme cylindrique

La base de ce cylindre est un disque de diamètre 5 cm, donc de rayon moitié, soit 2,5 cm.

L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule : $\text{Aire}(\text{disque}) = \pi \times R^2$.

L'aire de la base de ce flacon est donc : $\pi \times (2,5 \text{ cm})^2 = 6,25 \pi \text{ cm}^2$.

Sa hauteur utile étant de 6 cm, son volume V est : $V = 6,25 \pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 37,5 \pi \text{ cm}^3$.

La valeur exacte du volume du flacon de forme cylindrique est $37,5 \pi \text{ cm}^3$.

Une valeur approchée en est $117,81 \text{ cm}^3$.

La valeur arrondie de ce volume à l'unité près de centimètre cube est de 118 cm^3 .

1) c) Volume du flacon de forme pyramidale

Le volume de ce flacon est égal à la différence entre celui de la pyramide que forment ensemble le flacon et son bouchon et celui de la pyramide réduite correspondant au seul bouchon.

Le coefficient de la réduction qui permet de passer de la première à la seconde de ces pyramides est donné

par le rapport entre les côtés de leurs bases respectives. Ce coefficient est donc égal à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire à 0,4.

Calcul du volume de la pyramide que forment ensemble le flacon et le bouchon

L'aire de la base carrée de la grande pyramide est de $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Sa hauteur étant de 11 cm, son volume V est :

$$V = \frac{25 \text{ cm}^2 \times 11 \text{ cm}}{3} = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 \approx 91,667 \text{ cm}^3.$$

Calcul du volume du bouchon

Méthode 1 : en utilisant uniquement le coefficient de réduction

Puisque le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon est de 0,4, le rapport entre leurs volumes est de $0,4^3$.

Le volume V' du bouchon est donc égal à :

$$V' = 0,4^3 \times V = 0,4^3 \times \frac{275}{3} \text{ cm}^3 = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{soit } V' \approx 5,867 \text{ cm}^3.$$

Méthode 2 : en déterminant la hauteur et en utilisant la formule du volume

Le rapport entre la hauteur h' du seul bouchon et la hauteur h de la grande pyramide est donné par le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon.

On a donc $\frac{h'}{h} = 0,4$ d'où $h' = 0,4 \times h = 0,4 \times 11 \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}$.

L'aire de la base du bouchon est de $(2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$.

Sa hauteur étant de 4,4 cm, son volume V' est : $V' = \frac{4 \text{ cm}^2 \times 4,4 \text{ cm}}{3} = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$

soit $V' \approx 5,867 \text{ cm}^3$.

Calcul du volume du flacon

Le volume du flacon est donc égal à :

$$V - V' = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 - \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3 = \frac{257,4}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{soit } V - V' = 85,8 \text{ cm}^3.$$

Remarque

Le calcul suivant, $V - V' \approx 91,667 \text{ cm}^3 - 5,867 \text{ cm}^3 \approx 85,8 \text{ cm}^3$, effectué avec des valeurs approchées, permet de vérifier que $85,8 \text{ cm}^3$ est une valeur approchée du volume du flacon ; il ne permet toutefois pas d'affirmer qu'il s'agit de la valeur exacte.

2) Enquête auprès des clients

2) a) Proportion de personnes préférant le flacon cylindrique

Le nombre total de personnes ayant répondu à l'enquête est de $82 + 109 + 47 = 238$ personnes.

Parmi elles, 109 ont déclaré préférer le flacon cylindrique, ce qui représente une proportion de :

$$\frac{109}{238} \approx 0,458.$$

La proportion de personnes préférant le flacon cylindrique, en pourcentage à l'unité près, est donc d'environ 46 %.

2) b) Angle du secteur associé dans un diagramme circulaire

Méthode 1 : en utilisant la proportion exacte obtenue à la question précédente

Dans un diagramme circulaire, l'angle plein (360°) correspond à l'effectif total (ici 238) et les angles des différents secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs qu'ils représentent.

Ainsi puisque la proportion de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est de $\frac{109}{238}$; le secteur angulaire les représentant correspond à cette même fraction d'un tour complet, et son angle au centre a pour mesure :

$$\frac{109}{238} \times 360^\circ \approx 164,87^\circ.$$

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

Méthode 2 : en utilisant la proportion arrondie obtenue à la question précédente

En utilisant la valeur de 46 % trouvée à la question précédente comme valeur approchée de la proportion

$\frac{109}{238}$, on obtient pour l'angle du secteur une valeur de $0,46 \times 360^\circ \approx 165,6^\circ$, valeur que l'on est amené à arrondir au degré près à 166° .

Remarque

Cet exemple montre que pour assurer la précision voulue mieux vaut dans les calculs utiliser autant que faire se peut des valeurs exactes.

Méthode 3 : autres raisonnements utilisant la proportionnalité

D'autres raisonnements s'appuyant sur la proportionnalité sont possibles. On peut par exemple utiliser un tableau de proportionnalité.

Si l'on note α l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique, on peut traduire la situation par le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramidale	Total
Angle du secteur angulaire		α		360°
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47	238

On en déduit $\frac{\alpha}{109} = \frac{360^\circ}{238}$; d'où $\alpha = \frac{109 \times 360^\circ}{238} \approx 164,87^\circ$.

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

B - Flacons cylindriques**1) Conditionnement du parfum**

Par définition, une capacité d'un litre correspond au volume d'un cube dont l'arête est un décimètre. Cette égalité est traduite par la relation $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, qui donne après conversion $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$.

Méthode 1 : en convertissant les 50 L en cm^3

Une cuve de 50 L correspond donc à un volume de $50\,000 \text{ cm}^3$. Le nombre de flacons que permet de remplir

cette cuve est donc égal à $\frac{50\,000}{118} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

Méthode 2 : en convertissant les 118 cm^3 en L

La conversion donne $118 \text{ cm}^3 = 0,118 \text{ L}$.

Le nombre de flacons s'obtient en divisant la volume de la cuve par celui d'un flacon.

Le calcul donne $\frac{50\,000 \text{ L}}{118 \text{ L}} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

2) Étude du coût des flacons**2) a) Prix de 2 500 flacons****Entreprise 1**

Le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de :

$$2\,500 \times 2,40 \text{ €} = 6\,000 \text{ €}.$$

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$2\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 4\,500 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 6\,500 \text{ €}.$$

2) b) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 1

Le montant $f(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 1 est donné par l'expression : $f(x) = 2,4x$.

2) c) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 2

Le montant $g(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 2 est donné par l'expression : $g(x) = 1,8x + 2\,000$.

2) d) Représentations graphiques des fonctions f et g

La fonction f est de la forme $f(x) = ax$. Il s'agit donc d'une fonction affine particulière : c'est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est donc portée par une droite passant par l'origine.

La fonction g est de la forme $g(x) = ax + b$. Il s'agit donc d'une fonction affine. Sa représentation graphique est portée par une droite.

Plus précisément les représentations graphiques des fonctions f et de g sont les points de ces deux droites dont les abscisses sont les nombres entiers compris entre 1 et 10 000.

Pour réaliser chaque tracé des droites auxquelles appartiennent l'ensemble de ces points, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points.

On a aisément les coordonnées des points d'abscisse nulle (par exemple à l'aide de l'ordonnée à l'origine) : la représentation de f passe par l'origine et celle de g passe par le point de coordonnées $(0 ; 2\,000)$.

Par ailleurs, d'après les résultats de la question a), la représentation de la fonction f passe par le point $(2\,500 ; 6\,000)$ et celle de g par le point $(2\,500 ; 6\,500)$.

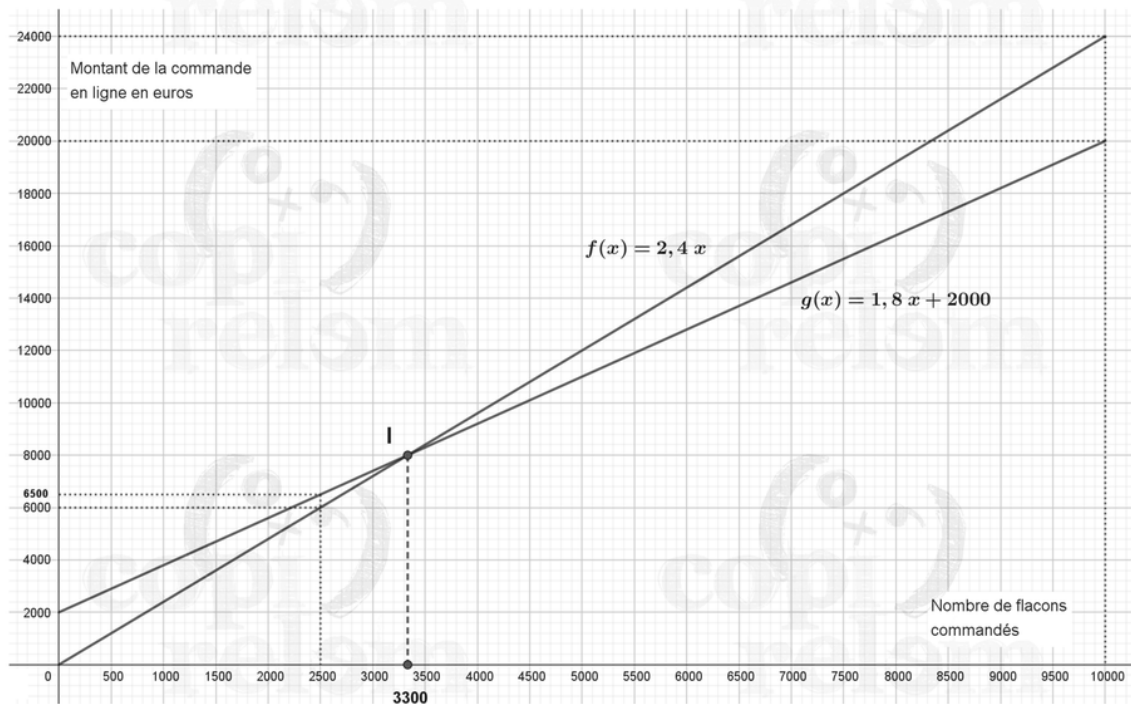
Remarque

Le calcul des coordonnées d'un troisième point permet une vérification, mais améliore aussi la précision si on le choisit suffisamment éloigné des deux points déjà choisis.

On pouvait ainsi utilement dans chacun des cas calculer le prix de 10 000 flacons commandés.

On a $f(10\,000) = 2,4 \times 10\,000 = 24\,000$

et $g(10\,000) = 1,8 \times 10\,000 + 2\,000 = 18\,000 + 2\,000 = 20\,000$.

**2) e) Détermination graphique du nombre de flacons à partir duquel commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux**

Commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la droite représentant la fonction g est située en dessous de la droite représentant la fonction f .

Par lecture graphique, c'est le cas pour les valeurs de x supérieures à l'abscisse du point I d'intersection de ces deux droites.

Avec la précision permise par le graphique (au millimètre près), on obtient 3 300 comme valeur approchée de l'abscisse de I de, à 100 près.

Ainsi choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la commande dépasse un nombre de l'ordre de 3 300 flacons.

Remarque

Compte tenu de la précision permise par l'unité, toute valeur approchée comprise entre 3 300 et 3 400 flacons était acceptable.

2) f) Détermination par le calcul de ce même nombre

Choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque le nombre x de flacons commandés vérifie l'inéquation $g(x) < f(x)$, c'est-à-dire $1,8x + 2\,000 < 2,4x$ ou encore $2,4x > 1,8x + 2\,000$.

Cette dernière inéquation s'écrit $2,4x - 1,8x > 2\,000$.

D'où $0,6x > 2\,000$ puis $x \geq \frac{2\,000}{0,6}$, soit $x > 3\,333,3$.

Ainsi l'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 334 flacons commandés.

2) g) Montant d'une commande de 7 500 flacons

Le volume de la commande étant supérieure à 3 334 flacons, c'est l'entreprise 2 qui sera la plus avantageuse. Le montant en euros sera de $g(7\,500) = 1,8 \times 7\,500 + 2\,000 = 13\,500 + 2\,000 = 15\,500$.

Une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 € par l'entreprise 2.

Remarque

On peut aussi procéder comme dans la question 2) a) sans utiliser le résultat de la question 2) f).

Entreprise 1

Le prix de 7 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de : $7\,500 \times 2,40 \text{ €} = 18\,000 \text{ €}$.

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$7\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 15\,500 \text{ €}.$$

$15\,500 \text{ €} < 18\,000 \text{ €}$ donc l'entreprise 2 est la plus avantageuse. Avec cette entreprise, une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 €.

C - Emballage d'un flacon cylindrique

1) Patron de la boîte sans couvercle

Remarque préalable

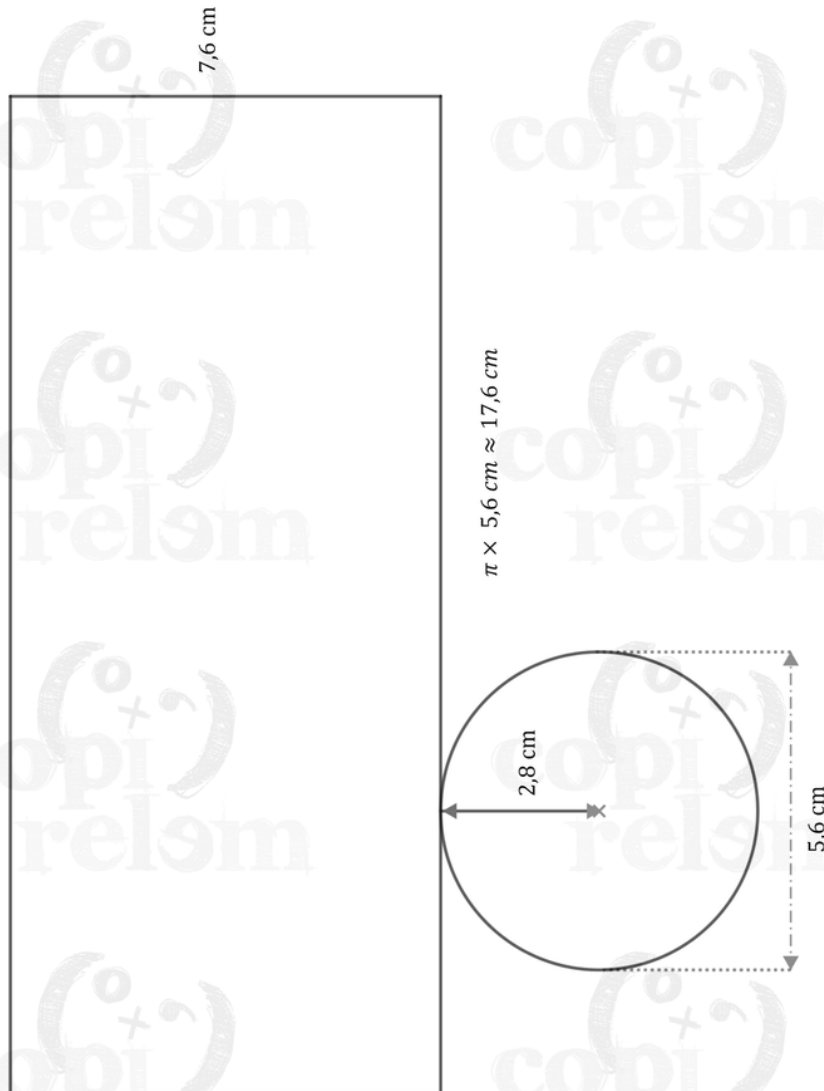
Il s'agit dans l'énoncé d'un usage impropre du terme de « patron ». Mieux vaudrait parler de « développement » de la boîte cylindrique avec un fond mais sans couvercle car les deux faces qui la composent n'ont pas d'arête commune mais sont simplement reliées par un point.

Le développement de cette boîte cylindrique sans couvercle est composé de deux faces.

Le fond est un disque de diamètre $D = 5,6 \text{ cm}$, et donc de rayon $R = 2,8 \text{ cm}$.

La face latérale, une fois développée, est un rectangle dont :

- la longueur L est égale à la circonférence du disque : d'où $L = 2\pi R = \pi D = \pi \times 5,6 \text{ cm} \approx 17,6 \text{ cm}$;
- la largeur l est égale à la hauteur du cylindre, soit $l = 7,6 \text{ cm}$.

**2) Masse de la boîte sans couvercle****2) a) Calcul de l'aire du patron**

L'aire du « patron » de la boîte sans couvercle est la somme des aires des deux surfaces qui le composent.

La face rectangulaire a pour aire $A_{\text{rectangle}} = L \times l = \pi \times 5,6 \text{ cm} \times 7,6 \text{ cm} = 42,56 \pi \text{ cm}^2$.

Le disque a pour aire $A_{\text{disque}} = \pi R^2 = \pi \times (2,8 \text{ cm})^2 = \pi \times 7,84 \text{ cm}^2 = 7,84 \pi \text{ cm}^2$.

Le patron a donc pour aire : $A_{\text{patron}} = A_{\text{rectangle}} + A_{\text{disque}} = 42,56 \pi \text{ cm}^2 + 7,84 \pi \text{ cm}^2 = 50,4 \pi \text{ cm}^2$

La valeur exacte de l'aire du patron de la boîte sans couvercle est $50,4 \pi \text{ cm}^2$.

On obtient à la calculatrice une valeur approchée de $158,34 \text{ cm}^2$.

La valeur arrondie à l'unité près (le cm^2) est donc de 158 cm^2 .

2) b) Masse de la boîte sans couvercle

Par définition de la masse surfacique, on a la relation :

$$\frac{\text{masse de la boîte}}{\text{aire du patron}} = \text{masse surfacique}.$$

On en déduit la relation suivante :

$$\text{masse de la boîte} = \text{aire du patron} \times \text{masse surfacique}.$$

La masse surfacique étant exprimée en gramme par mètre carré, l'homogénéité de ces formules sera assurée en exprimant la masse de la boîte en gramme et l'aire du patron en mètre carré.

En privilégiant pour l'aire du patron, la valeur exacte obtenue à la question précédente, une conversion en mètres carrés donne :

$$A_{\text{patron}} = 0,00504 \pi \text{ m}^2.$$

D'où pour la masse de la boîte :

$$\text{masse de la boîte} = 0,00504 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 4,0824\pi \text{ g}$$

$$\text{soit masse de la boîte} \approx \mathbf{12,825 \text{ g}}.$$

Remarque

En utilisant pour l'aire du patron, la valeur approchée obtenue à la question précédente, on obtenait successivement :

$$A_{\text{patron}} \approx 0,0158 \text{ m}^2 \text{ et } \text{masse de la boîte} = 0,0158 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 12,798 \text{ g}.$$

On retrouve ici la valeur approchée au gramme près de 13 g.

Notons toutefois que si le degré de précision voulue avait été plus important, au milligramme près par exemple, utiliser la valeur approchée pour l'aire du patron n'aurait pas convenu.

1) Construction de la figure représentant le parterre

Sur la représentation, nous noterons respectivement A, B, C, D et E les points correspondants dans la réalité aux piquets A, B, C, D et E.

Il s'agit ici dans un premier temps de construire un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés :

$$AB = 8 \text{ cm} ; \quad AC = 6 \text{ cm} ; \quad BC = 10,5 \text{ cm} .$$

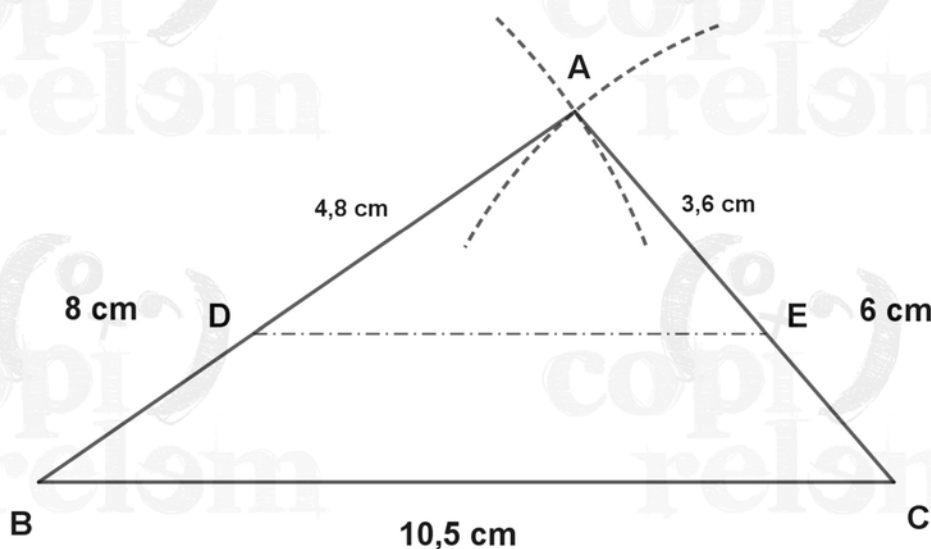
Pour ce faire, on commence par tracer à l'aide de la règle graduée l'un de ces trois segments, par exemple [BC]. Le point A sera alors l'un des deux points d'intersection du cercle de centre B et de rayon 8 cm et du cercle de centre C et de rayon 6 cm.

Remarque

Même si l'énoncé ne l'exigeait pas, on laisse apparent les arcs de cercle correspondants à cette construction.

Il ne reste plus qu'à placer à l'aide de la règle graduée :

- le point D qui appartient au segment [AB] et vérifie $AD = 4,8 \text{ cm}$;
- le point E qui appartient au segment [AC] et vérifie $AE = 3,6 \text{ cm}$.



2) Parallélisme des segments [BC] et [DE]

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre. De même les points A, E et C sont alignés dans cet ordre.

Comparons les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$.

On a d'une part, $\frac{AD}{AB} = \frac{4,8}{8} = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = 0,6$ et d'autre part, $\frac{AE}{AC} = \frac{3,6}{6} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Puisque ces deux rapports sont égaux entre eux, on peut affirmer, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ainsi la corde qui relie les piquets D et E est bien parallèle à celle qui relie les piquets B et C.

Remarque

On peut aussi procéder en comparant les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{AC}{AE}$, que l'on trouve tous deux égaux à $\frac{5}{3}$. Dans ce cas, on doit être attentif à comparer les valeurs exactes, qui s'écrivent sous forme fractionnaire, et non les valeurs décimales approchées.

L'égalité des valeurs approchées des rapports en effet ne permet pas de conclure.

On pouvait aussi, variante du théorème de Thalès, comparer entre eux les rapports $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{AD}{AE}$ (tous deux égaux à $\frac{4}{3}$) ou encore les rapports $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AE}{AD}$ (tous deux égaux à $\frac{3}{4}$ et donc à 0,75).

3) Calcul de la distance entre les piquets D et E

Méthode 1 : utilisation d'un rapport d'homothétie

Les calculs effectués à la question précédente et le parallélisme obtenu permettent d'affirmer que le triangle ADE est une réduction à l'échelle 0,6 du triangle ABC.

Le segment [DE] est donc l'image du segment [BC] par une homothétie de rapport 0,6 et on a :

$$DE = 0,6 \times BC = 0,6 \times 10,5 \text{ m} = 6,3 \text{ m}.$$

La distance entre les piquets D et E est donc de 6,3 mètres.

Méthode 2 : utilisation du théorème de Thalès dans le sens direct

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre. De même les points A, E et C sont alignés dans cet ordre.

On a démontré que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Le théorème de Thalès, utilisé ici dans le sens direct, permet d'affirmer l'égalité entre les rapports suivants :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Les deux derniers rapports sont égaux à 0,6 (cf question précédente).

On a donc $\frac{DE}{BC} = 0,6$ d'où $DE = 0,6 \times BC = 0,6 \times 10,5 \text{ m} = 6,3 \text{ m}.$

La distance entre les piquets D et E est donc de 6,3 mètres.

4) Égalité des aires des deux zones de plantations

Le triangle ADE est l'image du triangle ABC dans une homothétie de rapport 0,6.

Le rapport entre les aires de ces deux triangles est donc de $0,6^2 = 0,36$.

Ainsi l'aire du triangle ADE est égale à 36 % de l'aire totale du triangle ABC.

Par différence, l'aire de la seconde zone de plantation, qui correspond au trapèze BCED, est égale à 64 % de l'aire du triangle ABC.

En conséquence, les deux zones de plantations ne sont pas de même aire.

Remarques

1) On peut aussi déduire le fait que les deux aires ne sont pas égales des deux égalités suivantes :

$$\text{Aire}(ADE) = 0,36 \text{ Aire}(BCED) \quad \text{et} \quad \text{Aire}(ADE) = 0,64 \text{ Aire}(BCED).$$

2) Dans cette configuration, le triangle ABC n'est pas rectangle (AB et AC étant égaux à 8 m et à 6 m, il faudrait pour cela que BC soit égal à 10 m, ce qui n'est pas le cas) et l'on ne connaît aucune des hauteurs du triangle. Il est donc très délicat de déterminer l'aire totale du triangle ABC ou celle de l'une ou l'autre des zones de plantation. Ces calculs dépasseraient de loin les compétences inscrites au programme du cycle 4.

1) Somme obtenue en lançant deux dés cubiques**1) a) La modélisation et le résultat de Karim sont-ils corrects ?**

Démarche A : en explicitant et en discutant le raisonnement de Karim

Karim modélise la situation de la façon suivante : il identifie 11 événements élémentaires et incompatibles entre eux qui correspondent aux sommes qu'il est possible d'obtenir. Parmi eux, il repère 6 sommes paires (2 ; 4 ; 6 ; 8, 10 et 12) et 5 qui sont impaires (3 ; 5 ; 7 ; 9 et 11).

Pour conclure, il utilise alors implicitement la formule suivante donnant la probabilité d'un événement E :

$$p(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Or cette formule n'est valable que lorsqu'il y a équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque l'ensemble des cas possibles recensés ont tous la même probabilité d'apparition, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation proposée par Karim.

Pour s'en convaincre comparons les probabilités des événements « la somme est égale à 2 » et « la somme est égale à 7 » en considérant pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre vert.

Pour réaliser l'événement « la somme est 2 », le dé rouge doit absolument indiquer 1 et le dé vert aussi. Il n'y a donc qu'un seul cas favorable.

Par contre, pour réaliser l'événement « la somme est 7 », on peut être indifférent au résultat du dé rouge, il y aura toujours une possibilité (sur les 6) d'obtenir avec le dé vert le complément à 7. On trouve alors six cas favorables.

Cet argument permet d'affirmer qu'il n'y a pas équiprobabilité et que le raisonnement de Karim n'est pas correct.

Démarche B : en proposant une modélisation correcte de la situation

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Considérons pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre est vert.

Suite au lancer du dé rouge, il y a 6 issues possibles équiprobables.

De façon indépendante, suite au lancer du dé vert, il y a aussi 6 issues possibles équiprobables.

Suite au lancer des deux dés, il y a donc $6 \times 6 = 36$ issues élémentaires possibles, incompatibles entre elles, et équiprobables.

On peut recenser ces 36 issues sous la forme un tableau à double entrée. Chacune de ses cases correspond à l'une de ces issues élémentaires. En indiquant dans chaque case la somme des deux dés, on obtient le tableau suivant :

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur les 36 cas possibles, il y en a 18 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises) et 18 pour lesquels cette somme est impaire (cases blanches).

La probabilité d'obtenir une somme paire est de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; il en est de même pour la probabilité d'obtenir une somme impaire.

La probabilité d'obtenir une somme paire est donc égale à celle d'obtenir une somme impaire.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'une somme

La somme est paire lorsque les deux dés indiquent des nombres de même parité, c'est-à-dire :

pair + pair ou impair + impair.

Que le premier dé indique un nombre pair ou un nombre impair, dans les deux cas le second dé a trois chances sur six, donc une chance sur deux d'indiquer un nombre ayant la parité attendue pour obtenir une somme paire.

L'évènement « obtenir une somme paire » a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$.

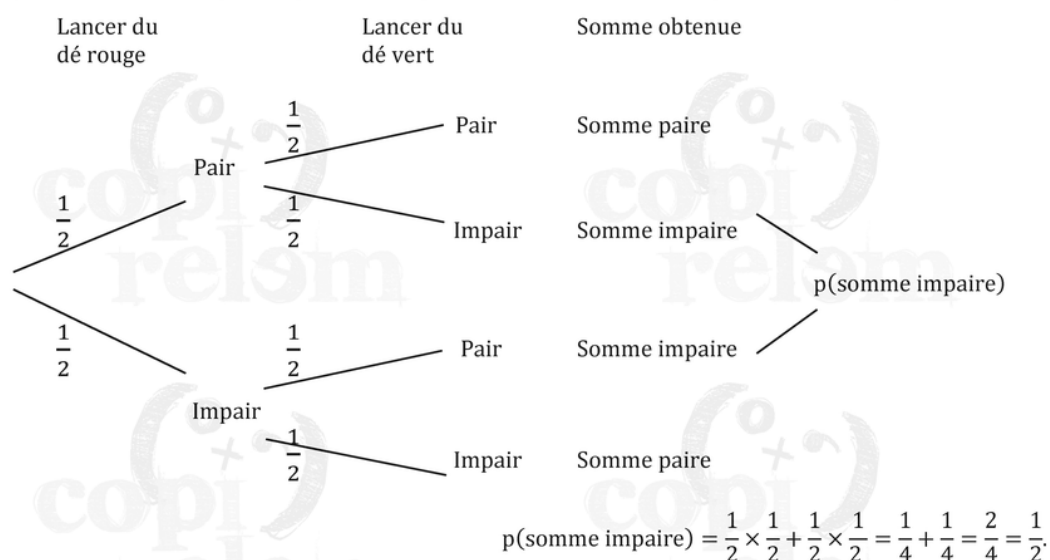
Pour conclure, on peut faire le même raisonnement sur l'évènement « obtenir une somme impaire » ou remarquer qu'il est le complémentaire du précédent pour obtenir une probabilité de $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Les probabilités d'obtenir une somme paire ou bien impaire sont donc égales.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour chacun des deux dés, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ (3 faces sur 6). Il en est de même pour la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



L'évènement « la somme est impaire » peut se décomposer en :

« le nombre donné par le dé rouge est pair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est impair »
OU BIEN

« le nombre donné par le dé rouge est impair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est pair »

La probabilité p de l'évènement « la somme est impaire » est donc donnée par le calcul suivant :

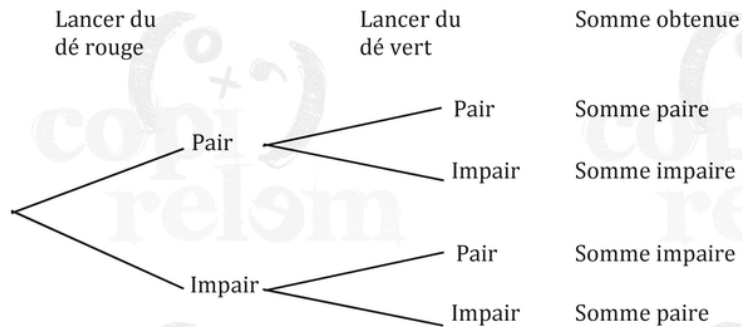
$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

À l'aide d'un calcul analogue ou en utilisant le fait que les deux évènements sont complémentaires :

on obtient aussi pour l'évènement « la somme est paire » une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équiprobabilité entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, deux conduisent à une somme paire et deux autres à une somme impaire. On trouve donc que les deux probabilités sont égales à $\frac{2}{4}$, donc à $\frac{1}{2}$.



Il y a 4 issues possibles. Deux donnent une somme paire ; deux une somme impaire.

Remarque

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé vert et représenter ensuite celui du dé rouge.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre de choix recensant les 36 issues possibles

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 6 pour recenser les 36 issues équiprobables possibles et identifier parmi elles celles où la somme obtenue est paire et celles où elle est impaire.

1) b) A-t-on une chance sur trois d'obtenir un multiple de 3 comme l'affirme Brigitte ?

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Dans le tableau à double entrée réalisé à la question précédente, on repère cette fois les cases où la somme obtenue est un multiple de 3.

dé rouge dé vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur les 36 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises).

La probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est donc de $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

On a donc bien une chance sur trois d'obtenir une somme multiple de 3 comme l'affirme Brigitte.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les restes dans la division euclidienne par 3

Parmi les six issues équiprobables possibles du lancer d'un dé cubique, deux sont des nombres dont le reste dans la division euclidienne par 3 est nul (il s'agit de 3 et 6), deux sont des nombres dont le reste dans cette même division est 1 (1 et 4), et deux sont des nombres dont le reste est 2 (2 et 5).

Ainsi, quel que soit le nombre obtenu avec le premier lancer, ou dit autrement quel que soit le reste dans la division euclidienne par 3 du nombre obtenu avec le dé rouge, au second lancer (le dé vert) il y a aura toujours 2 chances sur 6 d'obtenir un nombre tel que la somme des résultats des deux lancers ait un reste nul dans la division par 3, c'est-à-dire soit multiple de 3.

On peut donc affirmer que la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 est de $\frac{2}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

À titre d'exemples,

- si l'on obtient un 6 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (3 et 6) donneront une somme multiple de 3 ;
- si l'on obtient un 5 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (1 et 4) donneront une somme multiple de 3 ;
- ...

Remarque

Si l'on avait utilisé un arbre de choix à la question précédente, on pouvait réutiliser ce même arbre pour dénombrer parmi les 36 issues possibles, les 12 cas favorables où le score est un multiple de 3 et en déduire la

probabilité cherchée : $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

2) Produit obtenu en lançant un dé cubique et un dé tétraédrique

2) a) Les probabilités d'obtenir un produit pair ou impair sont-elles égales ?

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsque qu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a $6 \times 4 = 24$ issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée à six colonnes et quatre lignes. On indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

Dé à 4 faces \ Dé à 6 faces	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

Sur les 24 cas possibles, il y en a 6 pour lesquels le produit obtenu est impair (cases grises) et 18 pour lesquels le produit obtenu est pair (cases blanches).

La probabilité d'obtenir un produit pair est de $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$; et qu'il soit impair est de $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir un produit pair est donc très largement supérieure à celle d'obtenir un produit impair (c'est le triple).

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'un produit

Un produit de plusieurs facteurs est pair si et seulement si au moins de ses facteurs est pair.

Un produit de plusieurs facteurs est impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs.

Cette dernière condition est la plus simple à utiliser ici.

L'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » peut se décomposer en :

« le nombre indiqué par le dé cubique est impair » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 3 portent des nombres impairs (1 ; 3 et 5).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique est impair » est donc de $\frac{3}{6}$.

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 2 portent des nombres impairs (1 et 3).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair » est donc de $\frac{2}{4}$.

Ces deux évènements sont indépendants.

La probabilité de l'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » est donc :

$$p = \frac{3}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

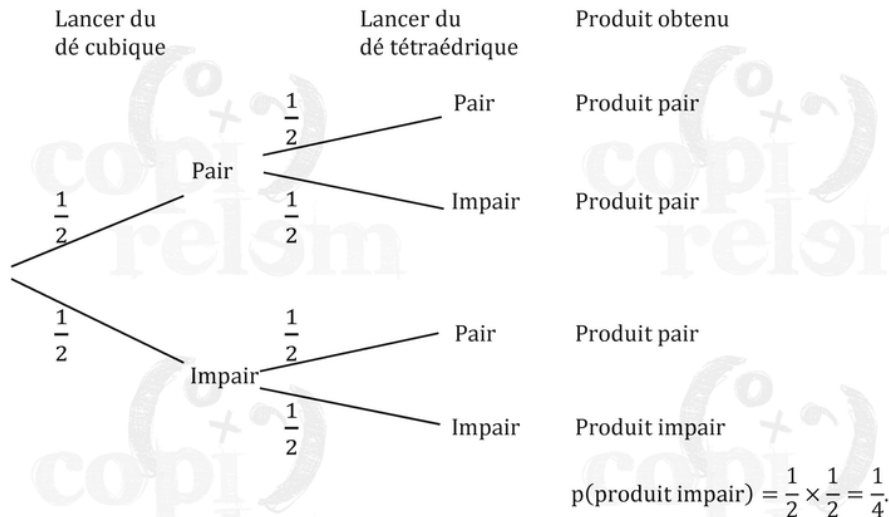
Cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{2}$.

C'est donc l'évènement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est pair » qui est le plus probable ; sa probabilité est de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)

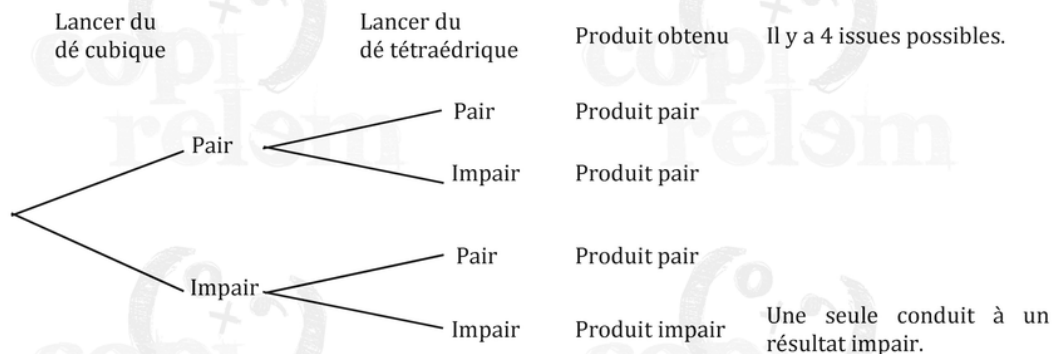
On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour le dé cubique, comme pour le dé tétraédrique, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ (3 faces sur 6 dans un cas, 2 faces sur 4 d'autre l'autre). Il en est de même de la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équiprobabilité entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, une seule conduit à un produit impair et trois à un résultat pair. On trouve donc des probabilités respectives de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.



Remarque

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles

On pouvait aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est pair et ceux où il est impair.

2) b) Probabilité d'obtenir un produit multiple de 3

Dans cette question, on pouvait reprendre en l'adaptant, la méthode utilisée à la question précédente.

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsqu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a $6 \times 4 = 24$ issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée, de six colonnes et quatre lignes. En indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

Dé à 6 faces Dé à 4 faces	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

Sur les 24 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels le produit obtenu est un multiple de 3 (cases grises).

La probabilité d'obtenir un produit multiple de 3 est donc de $\frac{12}{24}$ soit $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les multiples de 3

3 est un nombre premier. En conséquence :

- un produit de plusieurs facteurs est multiple de 3 si et seulement si au moins de ses facteurs est un multiple de 3 ;
- un produit de plusieurs facteurs n'est pas un multiple de 3 si et seulement si aucun de ces facteurs n'est multiple de 3.

Cette dernière condition, qui est la plus simple à utiliser ici, permet d'obtenir la probabilité de l'évènement complémentaire de celui cherché.

L'évènement « le produit des nombres indiqués n'est pas un multiple de 3 » peut se décomposer en : « le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 4 ne portent pas des nombres multiples de 3 (1 ; 2 ; 4 et 5). La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » est donc de $\frac{4}{6}$.

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 3 ne portent pas un nombre multiple de 3 (1 ; 2 et 4).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 » est donc de $\frac{3}{4}$.

Ces deux événements sont indépendants.

La probabilité de l'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés n'est pas un multiple de 3 » est donc :

$$p = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

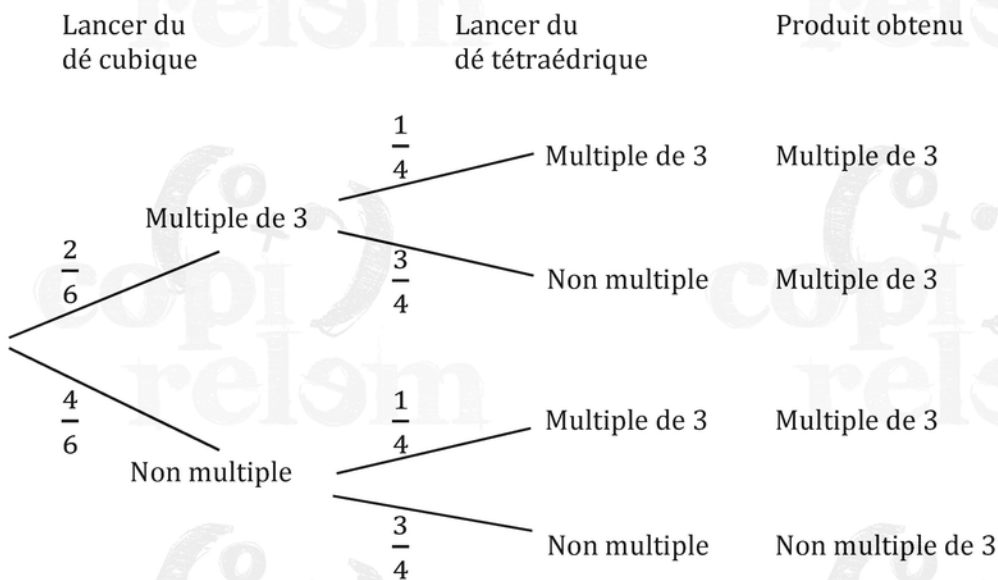
La probabilité de l'évènement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est un multiple de 3 » est donc $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est un multiple de 3 ou non.

Pour le dé cubique, seules deux des six faces portent un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de $\frac{4}{6}$ et de $\frac{2}{6}$.

Pour le dé tétraédrique, seule une des quatre faces porte un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de $\frac{1}{4}$ et de $\frac{3}{4}$.



$$p(\text{non multiple de 3}) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Remarque

1) L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

2) Contrairement à la question précédente, on ne pouvait plus modéliser la situation à l'aide d'un arbre binaire non pondéré car il n'y a plus d'équiprobabilité.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est un multiple de 3.

1) a) Nombre obtenu en entrant le nombre 5 dans le programme A

Lorsque l'on entre le nombre 5, la variable « réponse » prend la valeur 5 et le programme rend le résultat du calcul $5 \times 4 + 7$.

Comme $5 \times 4 + 7 = 20 + 7 = 27$, quand on entre le nombre 5 dans le programme A, **la réponse obtenue est bien le nombre 27.**

1) b) Nombre obtenu en entrant le nombre $\frac{7}{10}$ dans le programme A

Lorsque l'on entre le nombre $\frac{7}{10}$, la variable « réponse » prend la valeur $\frac{7}{10}$, nombre décimal dont l'écriture à virgule est 0,7.

La réponse obtenue à l'issue de l'exécution du programme sera le résultat du calcul : $0,7 \times 4 + 7$.

On a $0,7 \times 4 + 7 = 2,8 + 7 = 9,8$.

Quand on entre le nombre $\frac{7}{10}$ dans le programme A, **la réponse obtenue sera le nombre 9,8** (nombre qui s'écrit aussi $\frac{98}{10}$).

2) Nombre à entrer dans le programme B pour obtenir le nombre 0,69

Méthode 1 : méthode algébrique à l'aide d'une résolution d'équation

Si l'on note x le nombre entré dans le programme B, le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul : $x \times 9 - 3$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $9x - 3$.

Ainsi le nombre x qu'il faut entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit 0,69 doit être solution de l'équation : $9x - 3 = 0,69$.

Cette équation est équivalente à $9x = 3 + 0,69$ puis à $9x = 3,69$.

On obtient $x = \frac{3,69}{9}$, d'où $x = 0,41$.

Le nombre qu'il faut entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égal à 0,69 est donc le nombre 0,41 (qui s'écrit aussi sous forme de fraction décimale $\frac{41}{100}$).

Méthode 2 : méthode arithmétique

Le nombre cherché après multiplication par 9 et retrait de 3 est égal à 0,69, donc le nombre cherché multiplié par 9 est égal à 3,69.

On trouve donc le nombre cherché par la division $3,69 : 9 = 0,41$.

3) Preuve qu'en entrant un nombre impair dans le script B on obtient un multiple de 6

Les nombres pairs (qui correspondent aux doubles) sont les nombres de la forme $2k$, où k est un nombre entier.

Les nombres impairs (que l'on peut aussi définir comme ceux dont le reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 1) sont les nombres de la forme $2k + 1$, où k est un nombre entier.

Si l'on entre un nombre impair dans le programme B, le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul suivant : $(2k + 1) \times 9 - 3$.

Cette expression peut s'écrire $9(2k + 1) - 3$.

En la développant, puis en la simplifiant, on obtient : $9(2k + 1) - 3 = 18k + 9 - 3 = 18k + 6$.

Dans cette dernière expression, on peut mettre 6 en facteur.

Le résultat obtenu peut alors s'écrire sous la forme $6(3k + 1)$.

Comme k est un nombre entier, $3k + 1$ est aussi un nombre entier. Notons le K .

Ainsi, en entrant un nombre impair dans le programme B, le résultat obtenu s'écrit sous la forme $6K$, où K est un nombre entier. On reconnaît dans cette écriture la forme générale des multiples de 6.

En conséquence quel que soit le nombre impair entré dans le programme B, le résultat obtenu sera toujours un multiple de 6.

4) Existence de nombres permettant d'obtenir le même résultat avec les deux programmes

Si l'on note x le nombre que l'on entre dans chacun des deux programmes,

- le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script A sera le résultat du calcul : $x \times 4 + 7$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $4x + 7$;
- le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul : $x \times 9 - 3$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $9x - 3$.

Ces deux résultats seront égaux à la seule condition que le nombre x entré soit solution de l'équation :

$$4x + 7 = 9x - 3.$$

Cette équation se transforme en

$$4x - 9x = -3 - 7$$

puis en

$$-5x = -10 ;$$

$$\text{d'où } 5x = 10$$

et

$$x = 2.$$

Il existe donc un seul nombre qui permette d'obtenir le même résultat affiché avec les deux programmes. Il s'agit du nombre 2.

Ce n'était pas demandé, mais on peut vérifier que dans les deux cas on obtient un résultat égal à 15.

Remarque

Une recherche à l'aide d'essais organisés pouvait conduire à trouver 2 comme étant une solution au problème posé. Mais une telle procédure ne permettait pas de justifier que 2 est la seule et unique solution. Or la formulation de la question demandait très clairement d'être exhaustif et de s'assurer d'avoir trouvé toutes les solutions.