

A – Utilisation et interprétation de l'IMC chez l'adulte

Remarque

L'IMC est une grandeur quotient calculée en kg/m^2 . Cependant, dans la vie courante, cet indice est généralement donné sans unité. C'est aussi souvent le cas dans l'énoncé de ce problème. Mais, pour des raisons de cohérence et de rigueur mathématique, nous l'indiquerons à chaque fois.

1) Calcul de l'IMC de Claire

On utilise la formule $\text{IMC} = \frac{P}{T^2}$ avec ici $P = 53 \text{ kg}$ et $T = 1,6 \text{ m}$.

On calcule $\frac{53}{1,6^2} \approx 20,7$.

donc l'IMC de Claire est d'environ $20,7 \text{ kg/m}^2$.

Cette valeur étant comprise entre $18,5 \text{ kg/m}^2$ et 25 kg/m^2 , on peut dire que Claire est de corpulence normale.

2) a) Formule écrite en D2

Pour compléter le tableau, plusieurs formules peuvent être écrites en D2, par exemple :

`=B2/C2^2`

ou

`=B2/(C2*C2)`

ou

`=B2/$C2^2`

Remarque

Une seule formule était demandée, il y a d'autres possibilités.

2) b) Pourcentage des hommes « obèses » ou « en surpoids » parmi les interrogés

Sur les 8 hommes interrogés, 3 ont un IMC supérieur à 25 kg/m^2 .

Or $\frac{3}{8} = 0,375 = \frac{37,5}{100}$.

Donc parmi les hommes interrogés, 37,5% sont en surpoids ou obèses.

3) Calcul de la masse à perdre pour avoir un IMC de 25 kg/m^2

Méthode 1 : recherche puis utilisation de la taille de la personne

Puisque $\text{IMC} = \frac{P}{T^2}$, on a $T^2 = \frac{P}{\text{IMC}} = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} = 2,5 \text{ m}^2$.

On en déduit : $T = \sqrt{2,5} \text{ m}$.

Pour que l'IMC de la personne soit égale à 25 kg/m^2 , il faut que sa nouvelle masse corporelle P' soit solution de l'équation :

$$25 \text{ kg/m}^2 = \frac{P'}{\sqrt{2,5}^2 \text{ m}^2}$$

c'est-à-dire $P' = 25 \text{ kg/m}^2 \times 2,5 \text{ m}^2 = 62,5 \text{ kg}$.

La personne doit donc peser 62,5 kg, soit 7,5 kg de moins que sa masse corporelle actuelle de 70 kg.

Pour avoir un IMC de 25 kg/m^2 , la personne doit donc perdre 7,5 kg.

Méthode 2 : recherche directe de la nouvelle masse

Si on note P' la masse corporelle correspondant à un IMC de 25 kg/m^2 , on doit avoir :

$$25 \text{ kg/m}^2 = \frac{P'}{T^2}$$

donc : $P' = 25 \text{ kg/m}^2 \times T^2$.

Or la masse actuelle P de la personne est de 70 kg et correspond à un IMC de 28 kg/m^2 .

Donc on a : $28 \text{ kg/m}^2 = \frac{70 \text{ kg}}{T^2}$, d'où : $T^2 = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2}$.

On en déduit la valeur de P' :

$$P' = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \times 25 \text{ kg/m}^2 = 62,5 \text{ kg}.$$

La personne doit donc peser 62,5 kg, soit 7,5 kg de moins que sa masse corporelle actuelle de 70 kg.

Pour avoir un IMC de 25 kg/m^2 , la personne doit donc perdre 7,5 kg.

Méthode 3 : utilisation du rapport constant $\frac{P}{\text{IMC}}$

Puisque $\text{IMC} = \frac{P}{T^2}$, on a $T^2 = \frac{P}{\text{IMC}}$.

Or, la taille T est invariable (pour la personne considérée), donc ce rapport reste constant.

Si on note P' la masse corporelle de la personne correspondant à un IMC de 25 kg/m^2 , on doit avoir :

$$\frac{P'}{25 \text{ kg/m}^2} = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \quad \text{d'où } P' = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \times 25 \text{ kg/m}^2 = 62,5 \text{ kg}.$$

La personne doit donc peser 62,5 kg.

Puisqu'elle pèse actuellement 70 kg, **pour avoir un IMC de 25 kg/m^2 , la personne doit perdre 7,5 kg.**

4) Masses minimale et maximale d'une personne de 1,72 m et de « corpulence normale »

L'IMC d'une personne de « corpulence normale » est comprise entre $18,5 \text{ kg/m}^2$ et 25 kg/m^2 .

Si on note P la masse d'une telle personne mesurant 1,72 m, on aura :

$$18,5 \text{ kg/m}^2 \leq \frac{P}{1,72^2 \text{ m}^2} < 25 \text{ kg/m}^2$$

c'est-à-dire : $18,5 \text{ kg/m}^2 \times 1,72^2 \text{ m}^2 \leq P < 25 \text{ kg/m}^2 \times 1,72^2 \text{ m}^2$

et donc : $54,7304 \text{ kg} \leq P < 73,96 \text{ kg}.$

Pour avoir une « corpulence normale », une personne mesurant 1,72 m doit donc peser au minimum 54,730 kg et au maximum 73,960 kg.

Remarque

L'énoncé n'indique rien sur la précision attendue des nombres exprimant les masses. Nous faisons le choix de donner un encadrement avec des valeurs approchées au gramme près des valeurs maximales et minimales. Soulignons néanmoins que, dans les pratiques courantes, on pourra considérer qu'une personne est de « corpulence normale » lorsque sa masse corporelle est approximativement comprise entre 55 kg et 74 kg.

B – L'obésité et le surpoids en France

Remarques préliminaires

- D'après sa définition mathématique, une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. On la donne généralement sous forme d'écriture décimale ou fractionnelle. Ici, on nous demande de donner un pourcentage, qui n'est pas un « nombre » à proprement parler : on assimilera donc « un centième » à « un pour cent », confusion fréquente dans « la vie courante ».
- L'énoncé dit que « la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de l'échantillon ». Cela semble signifier que, pour chacune des catégories étudiées, le rapport entre son effectif au sein de l'échantillon et l'effectif total de l'échantillon, est égal au rapport entre son effectif dans la population pouvant être appelée et l'effectif total de cette population. Autrement dit, on considère que l'échantillon étudié est représentatif de la population pouvant être appelée et que les résultats statistiques de cette étude sur un échantillon peuvent être considérés comme des probabilités relatifs à la population globale.

1) Probabilité d'appeler une personne en surpoids ou obèse

Parmi les 25 714 personnes de l'échantillon étudié, le nombre de personnes en surpoids ou obèses est :

$$3\,551 + 4\,739 + 2\,119 + 1\,747 = 12\,156.$$

Le rapport entre l'effectif de ces personnes et l'effectif total de l'échantillon est donc : $\frac{12\,156}{25\,714} \approx 0,4727$.

Dans l'échantillon, environ 47 % des personnes sont « en surpoids » ou « obèses ».

L'énoncé suppose que « la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de l'échantillon », donc, dans la population pouvant être appelée, il y a environ 47 % de personnes en surpoids ou obèses.

Puisqu'on appelle une personne « au hasard », il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'appeler une personne en surpoids ou obèse est donc d'environ 47 %.

2) Probabilité que l'homme appelé soit en surpoids ou obèse

Sur les 12 214 hommes de l'échantillon, 4 739 + 1 747 sont en surpoids ou obèses, ce qui correspond à un rapport de :

$$\frac{4\,739 + 1\,747}{12\,214} \approx 0,5310.$$

Donc, sachant qu'on a appelé un homme, la probabilité que celui-ci soit obèse ou en surpoids est d'environ 53 %.

3) Probabilité que la personne obèse appelée soit un homme

Dans l'échantillon il y a 2 119 femmes obèses et 1 747 hommes obèses, soit au total 3 866 personnes obèses.

Donc le rapport entre le nombre d'hommes obèses et le nombre de personnes obèses est :

$$\frac{1\,747}{3\,866} \approx 0,4519.$$

Si on a appelé une personne obèse, la probabilité que celle-ci soit un homme est d'environ 45 %.

4) Validité de l'affirmation : « plus de $\frac{1}{6}$ de la population de l'échantillon est obèse »

Une personne prétend que plus de $\frac{1}{6}$ de la population de l'échantillon est obèse.

Méthode 1 : comparaison des rapports

D'après la question précédente, dans l'échantillon il y a 25 714 personnes parmi lesquelles 3 866 sont obèses. La proportion de personnes obèses dans cet échantillon est donc :

$$\frac{3\,866}{25\,714} \approx 0,1503.$$

Or $\frac{1}{6} \approx 0,1667$ donc les personnes obèses correspondent à moins d'un sixième de la population totale.

La personne a tort.

Méthode 2 : on suppose qu'il y a un sixième de personnes obèses dans l'échantillon et on compare les effectifs réels et théoriques

Méthode 2a : calcul de l'effectif de l'échantillon qui correspondrait

Dans l'échantillon, il y a au total 3 866 personnes obèses.

Si ces personnes constituaient $\frac{1}{6}$ de l'échantillon, il y aurait $6 \times 3\,866$ personnes dans l'échantillon, c'est-à-dire 23 196 personnes.

Or, l'échantillon réel contient 25 714 personnes, soit davantage que 23 196.

Les personnes obèses constituent donc moins d'un sixième de l'échantillon.

La personne a tort.

Méthode 2b : calcul de l'effectif de la population qui serait alors obèse dans l'échantillon

Dans l'échantillon, il y a au total 25 714 personnes.

On a $\frac{25\,714}{6} \approx 4\,286$ donc $\frac{1}{6}$ de l'échantillon correspond à un effectif d'environ 4 286 personnes.

Or il n'y a que 3 866 personnes obèses dans cet échantillon, donc la personne a tort.

C – Utilisation et interprétation de l'IMC chez l'enfant

1) L'IMC et l'âge d'un enfant sont-ils proportionnels ?

Remarque préliminaire

Dans cette question, il s'agit d'utiliser le graphique pour parler de l'IMC « chez l'enfant ».

Or, alors que ce graphique montre plusieurs courbes, seule la courbe de l'IMC d'Emma est celle d'un enfant « réel ». Les autres sont des courbes théoriques « moyennes » qui ne correspondent donc, de fait, à aucun enfant.

Pour pouvoir répondre il faut donc :

- soit considérer que le cas d'Emma peut être généralisé à « tout enfant » (le cas d'Emma est alors « un exemple générique ») ;
- soit considérer que, pour tout enfant, l'une des courbes « théoriques » donnera une bonne approximation de l'évolution de son IMC en fonction de son âge.

Cette seconde hypothèse semble légitime car toutes ces courbes ont sensiblement « la même forme ». On peut donc supposer que toute courbe représentant l'évolution de l'IMC d'un enfant donné en fonction de son âge aura globalement cette « même forme », quel que soit l'enfant considéré. C'est notamment le cas pour la courbe de l'IMC d'Emma qui est en général « proche » de la courbe « centrale » de la zone grise.

L'énoncé ne donnant aucune indication sur l'hypothèse à utiliser, nous proposerons les deux raisonnements pour chaque méthode.

NB : le cas d'Emma peut fournir un contre-exemple à l'affirmation générale « l'IMC d'un enfant est toujours proportionnel à son âge » mais ne permet pas d'affirmer ce qui semble être la réponse attendue : « l'IMC d'un enfant n'est jamais proportionnel à son âge ».

Méthode 1 : utilisation de « la forme » du graphique

Dans une situation de proportionnalité, la fonction donnant l'une des variables en fonction de l'autre est une fonction linéaire et sa représentation graphique est une droite (passant par l'origine du repère).

Méthode 1a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

Sur le graphique la courbe représentant l'IMC d'Emma en fonction de son âge n'est pas une droite, donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 1b : avec les courbes « théoriques »

Sur le graphique donné, aucune des courbes représentant l'IMC théorique en fonction de l'âge (maximum, minimum, moyenne, ...) n'est une droite.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 2 : utilisation de la valeur initiale de l'IMC

Dans une situation de proportionnalité, si l'une des variables est nulle, l'autre l'est aussi.

Remarque

Le poids d'un enfant à la naissance étant toujours non nul, l'IMC ne peut pas être nul. Cet argument seul permet de conclure mais l'énoncé demande d'utiliser le graphique.

Méthode 2a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

L'IMC de Emma à 0 an (à sa naissance) est différent de 0 : il est environ égal à 13,5 kg/m², donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 2b : avec les courbes « théoriques »

Quand l'âge d'un enfant est égal à 0 (à la naissance) son IMC n'est pas égal à 0 : sur le graphique, il n'est pas envisagé qu'il soit inférieur à 11 kg/m².

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 3 : utilisation de valeurs particulières lues sur le graphique

Si deux grandeurs sont proportionnelles, le rapport entre deux valeurs correspondantes est constant (égal au coefficient de proportionnalité).

Remarque

Dans le cas d'une lecture graphique, cette méthode est peu pertinente car plus complexe que les précédentes. Elle est néanmoins correcte.

Méthode 3a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

On peut lire sur le graphique, par exemple, que l'IMC d'Emma à 2 ans valait environ 16 kg/m² et qu'à 3 ans il valait environ 15 kg/m².

Les deux rapports $\frac{16}{2} = 8$ et $\frac{15}{3} = 5$ ne sont pas égaux.

Donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 3b : avec les courbes « théoriques »

On considère, par exemple, la valeur maximale de l'IMC pour une corpulence normale.

On lit sur la courbe supérieure de la partie grisée du graphique que l'IMC d'un enfant de 1 an est d'environ 20 kg/m² et que celle d'un enfant de 7 ans vaut environ 18 kg/m².

Les deux rapports $\frac{20}{1}$ et $\frac{18}{7}$ ne sont pas égaux.

Donc chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

2) Lectures graphiques

2) a) IMC maximum d'une fille de 12 ans non considérée « en surpoids »

On lit sur la courbe « supérieure » de la partie grisée la valeur de l'IMC correspondant à 12 ans : sur cette courbe, le point d'abscisse 12 a pour ordonnée 22.

Donc l'IMC maximum d'une fille de 12 ans non considérée « en surpoids » est 22 kg/m².

2) b) IMC d'une fille de 7 ans « de corpulence normale »

On lit sur les courbes « inférieure » et « supérieure » de la partie grisée les valeurs de l'IMC correspondant à 7 ans : les points d'abscisse 7 ont pour ordonnée environ 13 et environ 18 respectivement sur chacune de ces deux courbes.

Pour être considérée « de corpulence normale », une fille de 7 ans doit avoir un IMC compris environ entre 13 kg/m² et 18 kg/m².

2) c) Âge minimum d'une fille considérée « en insuffisance pondérale » avec un IMC de 15 kg/m²

La courbe « inférieure » de la zone grisée passe « au-dessus » de la droite d'équation $y = 15$ en un point d'abscisse approximative 13,5.

Une fille avec un IMC de 15 kg/m² sera considérée « en insuffisance pondérale » au-delà de 13,5 ans (13 ans et demi).

3) Lecture de l'IMC d'Emma

La courbe représentant l'IMC d'Emma est au-dessous de la droite d'équation $y = 16$ sur deux intervalles : lorsque l'abscisse x est inférieure à 0,5, et lorsqu'elle est comprise entre 2 et 10.

Emma a eu un IMC inférieur à 16 kg/m² lorsqu'elle avait moins de 6 mois puis entre 2 et 10 ans.

D – Alimentation

1) Valeurs nutritionnelles du goûter de Frédéric

Puisque Frédéric mange 30 g de gâteau et boit 200 mL de soda, on complète le tableau en multipliant les valeurs nutritionnelles de 100 g de gâteau par $\frac{30}{100}$ (ou 0,3) et celles de 100 mL de soda par 2.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides)	4,8 g	0 g	4,8 g
dont matières grasses saturées	1,86 g	0 g	1,86 g
Glucides	16,2 g	29,4 g	45,6 g
dont sucres	12,6 g	29,4 g	42 g
Protéines	1,65 g	0 g	1,65 g

2) a) Apport énergétique du sucre contenu dans le goûter de Frédéric

Remarque

L'apport énergétique apporté par le sucre est proportionnel à la masse de sucre absorbée. On peut donc utiliser toutes les propriétés relatives aux situations de proportionnalité. De plus, dans cette question, les nombres en jeu sont tels que les calculs peuvent être faits mentalement.

Méthode 1 : utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité

Une masse de 6 g de sucre correspond à un apport énergétique de 24 Kcal, donc 42 g de sucre (7×6 g) correspondent à 168 Kcal (7×24 Kcal).

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

Méthode 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

Une masse de 6 g de sucre correspond à un apport énergétique de 24 Kcal.

Puisque $24 = 6 \times 4$, le coefficient de proportionnalité permettant de calculer l'apport énergétique à partir de la masse de sucre est 4.

Or, $42 \times 4 = 168$, donc 42 g de sucre correspondent à 168 Kcal.

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

Méthode 3 : utilisation du « retour à l'unité »

Puisque 6 g de sucre apportent 24 Kcal, alors 1 g de sucre apporte 4 Kcal (« 6 fois moins ») et 42 g de sucre apportent 168 Kcal (« 42 fois plus »).

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

2) b) Nombre de morceaux de sucre correspondant à la masse maximale de sucre que devrait consommer Frédéric

L'apport énergétique en sucre ne devrait pas dépasser 10 % de l'apport énergétique quotidien qui, pour Frédéric est de 1 985 Kcal. Donc cet apport énergétique maximal en sucre est de 198,5 Kcal.

Or, un morceau de sucre apporte 24 Kcal et $\frac{198,5}{24} \approx 8,27$.

On en déduit que la masse de sucre que Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement est celle contenue dans environ 8,3 morceaux (arrondi au 10^{ème}).

Remarque

L'énoncé n'indique pas la précision attendue du résultat. On pourrait penser qu'un nombre de morceaux de sucre est nécessairement un nombre entier mais il ne s'agit pas ici de donner concrètement 8,3 morceaux de sucre. La traduction d'une masse de sucre en nombre de morceaux de sucre peut néanmoins permettre de « visualiser » la quantité de sucre à ne pas dépasser.

2) c) Pourcentage des apports quotidiens apportés par le sucre du goûter de Frédéric

D'après 2) a) on sait que le sucre contenu dans son goûter apporte 168 Kcal à Frédéric et, d'après l'énoncé de 2) b), que l'apport énergétique quotidien qui lui est recommandé est 1 985 Kcal.

Le rapport entre les deux est :

$$\frac{168}{1\,985} \approx 0,08463.$$

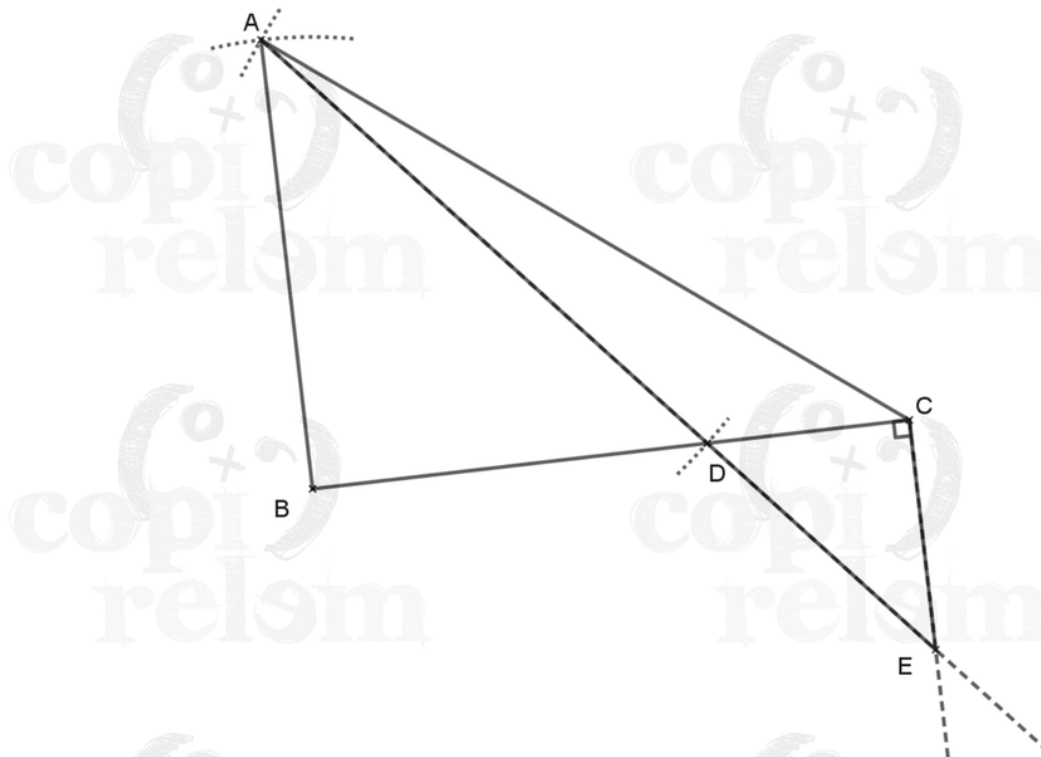
Donc le sucre de son goûter apporte à Frédéric environ 8,46 % de l'apport énergétique quotidien recommandé.

Remarques

À partir de la 2^{ème} question, l'exercice demande de calculer des longueurs et des aires. Les données initiales sont des nombres entiers mais ce n'est pas le cas des nombres cherchés. Or, l'énoncé ne nous donne aucune indication sur la précision attendue des résultats : dans ce corrigé, nous donnerons donc toujours les valeurs exactes.

Afin de ne pas alourdir le texte du corrigé de cet exercice, dans tous les calculs, nous remplacerons XY non par la longueur du segment [XY] mais par la mesure de cette longueur avec pour unité le cm.

1) Perpendicularité des droites (AB) et (BC)



Le plus long côté du triangle ABC est [AC].

On a : $AC^2 = 10^2 = 100$.

Et $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

On constate que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Donc, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Remarque

On peut savoir que le triplet (3 ; 4 ; 5) et tous ses multiples sont des « triplets pythagoriciens », donc (6 ; 8 ; 10) est un triplet pythagorien, ce qui implique que le triangle ABC ayant pour longueur de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm est un triangle rectangle.

2) Calcul de la longueur BD

Dans le rectangle ABD, rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore.

On a : $AD^2 = AB^2 + BD^2$.

D'où : $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$.

On en déduit : $BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Ainsi, la longueur BD est égale à $2\sqrt{7}$ cm.

3) Calcul de la longueur CE

Puisque les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires à (BC), elles sont parallèles entre elles.
D'autre part, les droites (BC) et (CE) sont sécantes en D.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB} = \frac{CE}{AB}$$

Or, $AB = 6$, $DB = 2\sqrt{7}$ et $DC = BC - BD = 8 - 2\sqrt{7}$ (car D est un point du segment [BC]).

Donc :

$$\frac{CE}{6} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$$

D'où $CE = 6 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 3 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24\sqrt{7}}{7} - 6$.

Soit $CE \approx 3,07$.

Ainsi, la longueur CE est égale à $\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right)$ cm (soit environ 3,1 cm arrondi au 10^{ème}).

Remarque :

La forme du résultat n'étant pas imposée, on peut aussi répondre, par exemple, que CE est égale à $\frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ cm

ou à $\frac{24\sqrt{7} - 42}{7}$ cm.

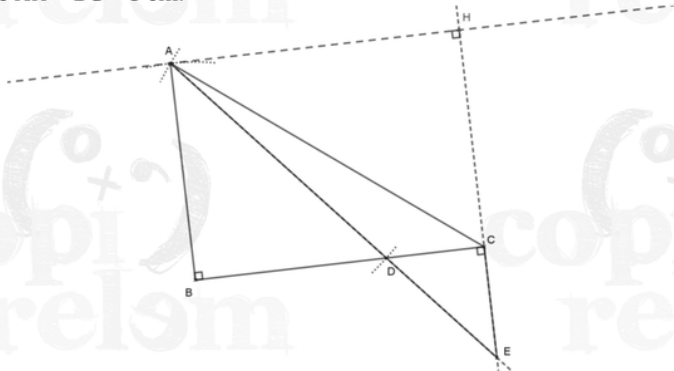
4) Calcul de l'aire du triangle ACE

Méthode 1 : calcul direct de l'aire du triangle ACE

Dans le triangle ACE, la hauteur relative au côté [CE] est la perpendiculaire à (CE) passant par A.

Si on note H le pied de cette hauteur, le quadrilatère AHCB a trois angles droits, donc c'est un rectangle.

On en déduit que $AH = BC = 8$ cm.



Puisque le segment [AH] est la hauteur relative au côté [CE] du triangle ACE, on a :

$$\text{Aire (ACE)} = \frac{CE \times AH}{2} = \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right) \times \frac{8}{2} = \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.$$

L'aire du triangle ACE est donc égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24\right)$ cm² (soit environ 12,3 cm²).

Méthode 2 : décomposition de l'aire du triangle ACE en somme des aires de deux triangles

L'aire du triangle ACE est égale à la somme de l'aire du triangle ADC et de l'aire du triangle DCE.

Dans le triangle ADC, la hauteur issue de A est [AB] car (AB) et (BC) sont perpendiculaires (d'après 1)),

donc $\text{Aire (ADC)} = \frac{DC \times AB}{2}$.

Le triangle DCE est rectangle en C, donc $\text{Aire (DCE)} = \frac{EC \times DC}{2}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire (ACE)} &= \frac{DC \times AB}{2} + \frac{EC \times DC}{2} \\
 &= \frac{DC}{2} \times (AB + EC) \\
 &= \frac{(8 - 2\sqrt{7})}{2} \times \left[6 + \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \right] \\
 &= \frac{12}{7} \times (8\sqrt{7} - 14). \\
 \text{Aire (ACE)} &= \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.
 \end{aligned}$$

L'aire du triangle ACE est égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \right) \text{ cm}^2$, soit environ $12,3 \text{ cm}^2$.

Remarque

Puisque l'énoncé ne dit rien sur la forme du résultat attendu, la simplification des écritures avec quotients et racines carrées n'est pas nécessaire.

On pourrait donc admettre comme réponse, par exemple :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{(8 - 2\sqrt{7}) \times 6}{2} + \frac{\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \times (8 - 2\sqrt{7})}{2} \approx 12,28.$$

En outre, pour cette question, il est possible que les correcteurs de l'épreuve aient accepté dans les calculs l'utilisation de valeurs approchées des longueurs obtenues dans les questions précédentes.

2) $30n + 25$ est divisible par 5

Pour tout entier n , on peut écrire : $30n + 25 = 5 \times (6n + 5)$.

Comme n est un nombre entier, $6n + 5$ est aussi un nombre entier.

On en déduit que $30n + 25$ est divisible par 5, pour tout n .

2) a) Vérification du résultat du programme lorsque le nombre choisi est 8

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est 8.

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	8
Multiplier par 3	$8 \times 3 = 24$
Ajouter 5	$24 + 5 = 29$
Élever au carré	$29^2 = 841$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$841 - 9 \times 8^2 = 841 - 576 = 265$

Si le nombre entier choisi est 8, le résultat est bien 265.

2) b) Résultat du programme lorsque le nombre entier choisi est (-56)

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est (-56) .

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	-56
Multiplier par 3	$-56 \times 3 = -168$
Ajouter 5	$-168 + 5 = -163$
Élever au carré	$(-163)^2 = 26\,569$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$26\,569 - 9 \times (-56)^2 = 26\,569 - 28\,224 = -1\,655$

Si le nombre entier choisi est (-56) , le résultat est $(-1\,655)$.

2) c) Divisibilité par 5 du résultat du programme

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est n .

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	n
Multiplier par 3	$3n$
Ajouter 5	$3n + 5$
Élever au carré	$(3n + 5)^2$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$(3n + 5)^2 - 9n^2$

Si le nombre choisi est n , le résultat du programme de calcul est donc $(3n + 5)^2 - 9n^2$.
On transforme l'écriture de cette expression.

Méthode 1 : développement de l'expression donnant le résultat

On a : $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (3n + 5)(3n + 5) - 9n^2 = (9n^2 + 15n + 15n + 25) - 9n^2 = 30n + 25$.

Le résultat du programme de calcul est donc $30n + 25$.

D'après la question 1), on sait que ce nombre est divisible par 5 quel que soit le nombre entier n ,
donc **le résultat du programme est divisible par 5 quel que soit le nombre de départ.**

Remarque

Dans le calcul précédent, l'utilisation du produit remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ permet d'écrire directement $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (9n^2 + 30n + 25) - 9n^2 = 30n + 25$.

Méthode 2 : factorisation de l'expression donnant le résultat

On utilise le produit remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

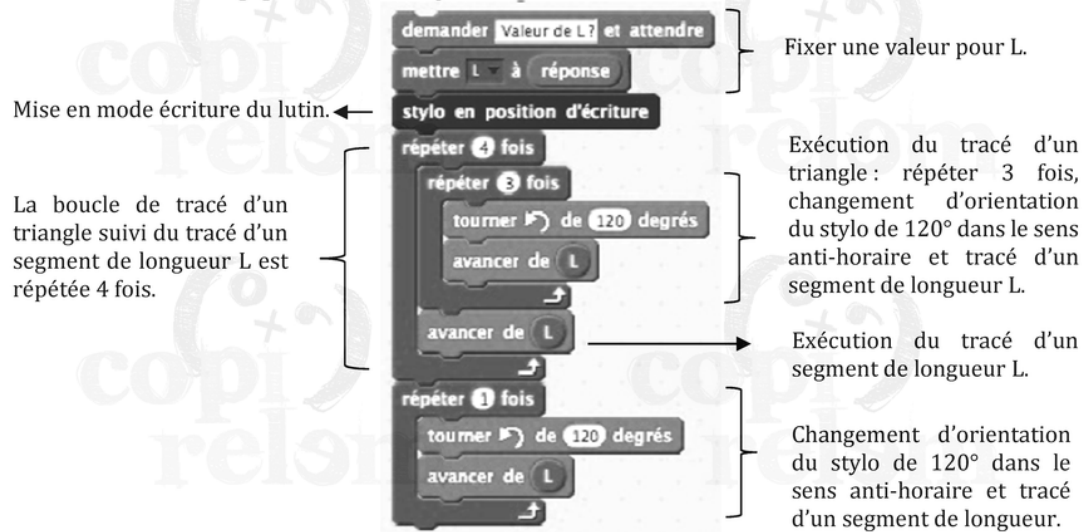
On a : $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (3n + 5)^2 - (3n)^2 = (3n + 5 + 3n)(3n + 5 - 3n) = (6n + 5) \times 5$.

Ce nombre est toujours un multiple de 5.

Le résultat du programme de calcul est divisible par 5 quel que soit le nombre de départ.

Programme B

Les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :



Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer la valeur de L, comme le programme A, le programme B fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 1*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 2*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 3*) puis tracer un segment de longueur L (*étape 4*).

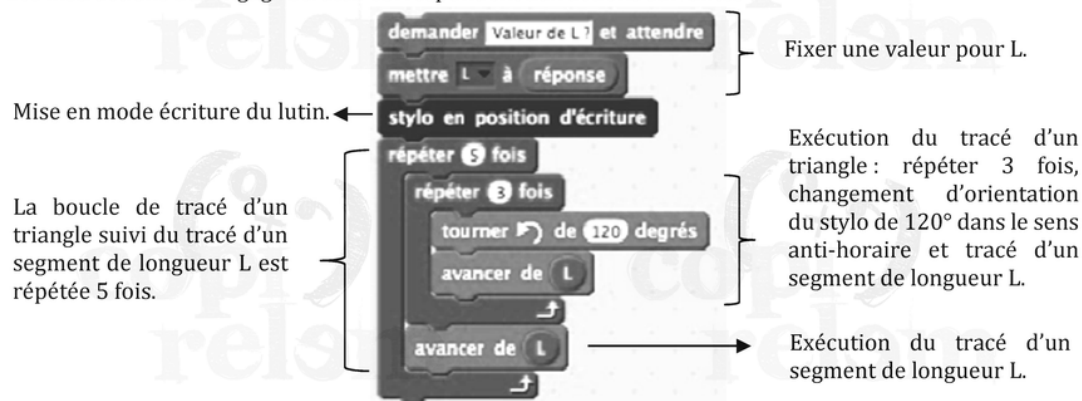
Comme dans le programme A, ces quatre étapes sont répétées quatre fois mais ensuite le programme fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L.

On en déduit que le programme B fait tracer quatre triangles équilatéraux et deux segments de longueur L comme ci-dessous :



Programme C

Les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :



Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer la valeur de L, comme les programmes A et B, le programme D fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 1*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L

1) Programme permettant de tracer le dessin

Le programme qui permet de tracer ce dessin est le **programme C**.

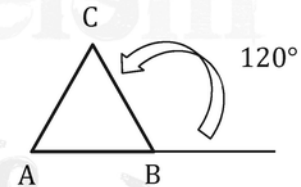
2) Justification de la valeur de l'angle de rotation

Les triangles qui composent cette figure sont des triangles équilatéraux (tous les segments tracés par le programme sont de même longueur L) et l'on sait que les angles d'un triangle équilatéral sont tous égaux à 60 degrés.

Le choix qui est fait par le programme est de commencer la construction de chaque triangle à partir du sommet « en bas à droite » (B sur le schéma ci-contre).

Par conséquent, l'objet « chat » étant initialement orienté « vers la droite », il doit effectuer une rotation de $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ avant d'effectuer le tracé [BC].

Il en est de même lorsqu'il arrive au sommet C puis en A.



3) Tracé à main levée des figures obtenues avec chacun des programmes non retenus

Remarque

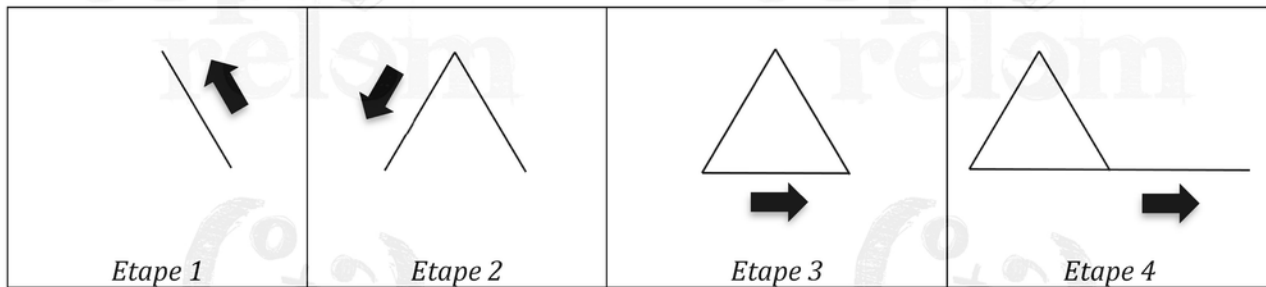
Ni le détail des actions réalisées par le programme, ni les justifications n'étaient attendus. Nous les donnons ici pour une meilleure compréhension du candidat.

Programme A :

Les instructions du langage Scratch correspondant aux actions suivantes :



Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer une valeur pour L, le programme fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (étape 1), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (étape 2), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (étape 3) puis tracer un segment de longueur L (étape 4).



Ces quatre étapes sont répétées quatre fois.

On en déduit que le programme A fait tracer quatre triangles équilatéraux et un segment de longueur L comme ci-dessous :



(étape 2), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (étape 3) puis tracer un segment de longueur L (étape 4).

Ces quatre étapes sont répétées cinq fois.

On en déduit que le programme D fait tracer cinq triangles équilatéraux et un segment de longueur L comme ci-dessous :

