

Le problème proposé consiste à étudier le volume utile d'un appentis et d'évaluer le coût de construction.

A - Surface de l'appentis et étude du volume utile

1) Calcul de l'aire du rectangle ABFE

$AE = 4,8$ m et $AB = 1,5$ m.

L'aire d'un rectangle se calcule avec la formule $L \times l$ c'est-à-dire ici $4,8 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ soit $7,2 \text{ m}^2$.

L'aire du rectangle ABFE (la surface au sol) est $7,2 \text{ m}^2$.

2) Calcul de l'aire du toit et de la pente

2) a) Calcul de la longueur CD

I est le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle, donc

$AD = BI = 2,4$ m et $DI = AB = 1,5$ m.

Comme C, I et B sont alignés dans cet ordre,

$CI = BC - IB = 2,4 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 0,8$ m.

Comme ABID est un rectangle, (DI) est perpendiculaire à (BC). Le triangle DIC est donc rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore :

$$CD^2 = DI^2 + IC^2$$

$$CD^2 = 1,5^2 + 0,8^2 = 2,25 + 0,64 = 2,89$$

$$CD = \sqrt{2,89} \text{ m} = 1,7 \text{ m}.$$

La longueur CD est égale à 1,7 m.

2) b) Surface du toit

Comme l'appentis a une forme de prisme droit, les faces latérales CDHG et AEHD sont des rectangles.

Comme AEHD est un rectangle, $HD = AE = 4,8$ m.

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle CDHG :

$$\mathcal{A} = 4,8 \text{ m} \times 1,7 \text{ m} = 8,16 \text{ m}^2.$$

L'aire de la surface du toit est $8,16 \text{ m}^2$.

Remarque

La question de l'énoncé n'est pas claire « en déduire la surface du toit CDHG », la réponse serait : CDHG est un rectangle car la surface est un ensemble de points. Ici il est attendu l'aire c'est-à-dire une grandeur attachée à cette surface.

2) c) Pente du toit

Dans le triangle DIC rectangle en I,

$$\tan \widehat{CDI} = \frac{CI}{DI} = \frac{0,8}{1,5}.$$

Avec la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{CDI} = \tan^{-1}\left(\frac{0,8}{1,5}\right) \quad \text{soit} \quad \widehat{CDI} \approx 28^\circ.$$

La pente du toit est environ égale à 28° .

Remarque

On aurait tout aussi bien pu utiliser les autres relations trigonométriques dans le triangle rectangle DCI :

$$\cos \widehat{CDI} = \frac{DI}{CD} \quad \text{ou} \quad \sin \widehat{CDI} = \frac{CI}{CD}.$$

3) Représentation du trapèze. Calcul de l'aire du trapèze et du volume utile de l'appentis**3) a) Calcul des dimensions et tracé**

La représentation du rectangle ABCD à l'échelle 1/50 est une réduction de celui-ci.

Plusieurs techniques sont disponibles pour résoudre ces problèmes d'échelle.

L'échelle de 1/50 signifie que sur la représentation 1 cm correspond à 50 cm dans la réalité c'est-à-dire 0,5 m. Disposant de cette relation, on détermine les dimensions manquantes en appliquant les techniques de recherche de quatrième proportionnelle.

Dans ce cas particulier, on peut donc diviser les mesures en réalité en m par 0,5 pour obtenir les mesures sur la représentation en cm.

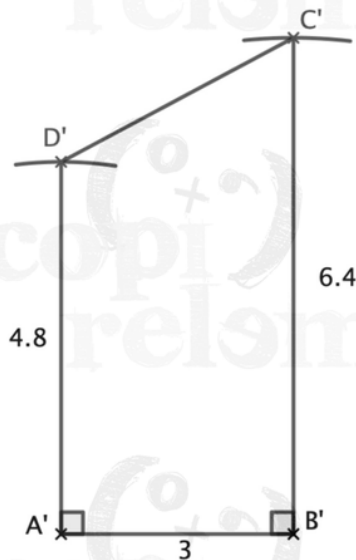
On peut aussi directement s'appuyer sur la définition suivante d'une échelle de reproduction : l'échelle est le nombre (sans dimension) par lequel il faut multiplier les dimensions dans la réalité pour obtenir les dimensions sur la représentation.

Les dimensions du trapèze A'B'C'D' sont celles du trapèze ABCD multipliées par 1/50 :

Dimensions en réalité	AB = 1,5 m	AD = 2,4 m	BC = 3,2 m
Dimensions sur la représentation	$A'B' = 1,5 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'B' = 0,03 \text{ m}$ $A'B' = 3 \text{ cm}$	$A'D' = 2,4 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'D' = 0,048 \text{ m}$ $A'D' = 4,8 \text{ cm}$	$B'C' = 3,2 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $B'C' = 0,064 \text{ m}$ $B'C' = 6,4 \text{ cm}$

Remarque

Pour le tracé d'un trapèze rectangle, il suffit de la mesure de trois longueurs. La longueur CD n'est pas nécessaire.

Représentation de la figure**3) b) Aire du trapèze**

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} = \frac{(2,4 \text{ m} + 3,2 \text{ m}) \times 1,5 \text{ m}}{2} = 4,2 \text{ m}^2.$$

L'aire du trapèze ABCD est 4,2 m².

Remarque

On peut aussi décomposer le trapèze en un rectangle ABID et un triangle rectangle DIC. L'aire du trapèze ABCD s'obtient alors en sommant les aires du rectangle ABID et du triangle rectangle DIC,

soit $1,5 \text{ m} \times 2,4 \text{ m} + \frac{1,5 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}}{2}$; soit $3,6 \text{ m}^2 + 0,6 \text{ m}^2$; ce qui est bien égal à $4,2 \text{ m}^2$.

3) c) Volume utile

Cet appentis est représenté par un prisme droit de base le trapèze ABCD et de hauteur AE.

Le volume d'un prisme est donné par la formule : Aire de la base $\times$ hauteur.

Le volume $\mathcal{V}$ du prisme droit est égal à :

$$\mathcal{V} = 4,2 \text{ m}^2 \times 4,8 \text{ m} = 20,16 \text{ m}^3.$$

Un stère vaut 1 m^3 donc $20,16 \text{ m}^3 > 15$ stères.

L'appentis contient assez de place pour stocker 15 stères de bois.

Autre méthode

Si on calcule le volume du parallélépipède rectangle ABIDEFKH (avec I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle et K le point du segment [FG] tel que EFKH est un rectangle), on trouve aussi un résultat supérieur à 15 stères : $AE \times AB \times AD \approx 17 \text{ m}^3$.

Et le volume de l'appentis est supérieur à celui de ce parallélépipède rectangle puisque ce dernier est inclus dans le prisme droit ABCDEFGH.

B - Réalisation de la dalle**1) Évacuer la terre**

Calculons le volume du trou creusé qui est assimilé à un parallélépipède rectangle dont le volume est donné par la formule $L \times l \times h$.

En reprenant le résultat obtenu à la question 1 de la partie A pour l'aire du rectangle ABFE, on a :

$$7,2 \text{ m}^2 \times 25 \text{ cm} = 7,2 \text{ m}^2 \times 0,25 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^3.$$

Le volume de terre non tassée est le volume du trou augmenté de 30 %, c'est-à-dire multiplié par $(1 + \frac{30}{100})$ soit 1,3 :

$$1,8 \text{ m}^3 \times 1,3 = 2,34 \text{ m}^3.$$

Calculons le nombre de voyage nécessaire avec une remorque de $0,7 \text{ m}^3$.

$$2,34 \text{ m}^3 \div 0,7 \text{ m}^3 \approx 3,34 \text{ m}^3.$$

3 voyages permettront d'évacuer $3 \times 0,7 \text{ m}^3$, soit $2,1 \text{ m}^3$ et il restera $0,24 \text{ m}^3$ à évacuer.

Pour évacuer complètement la terre, le propriétaire devra donc effectuer 4 voyages.

2) Coût d'une livraison de béton**2) a) Prix facturé pour 8 m^3**

Avec l'entrepreneur A, il faut faire deux livraisons car le camion ne peut contenir que 7 m^3 :

$$98 \text{ €} \times 8 + 150 \text{ €} \times 2 = 1\,084 \text{ €}.$$

Avec l'entrepreneur B, un seul voyage suffit :

$$75 \text{ €} \times 8 + 240 \text{ €} = 840 \text{ €}.$$

Le prix facturé pour l'achat de 8 m^3 de béton est de 1 084 € avec l'entrepreneur A et 840 € avec l'entrepreneur B.

2) b) Représentations graphiques des fonctions f et g

En lisant sur le graphique les coordonnées des points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec l'axe des ordonnées, on lit respectivement (0 ; 150) et (0 ; 240).

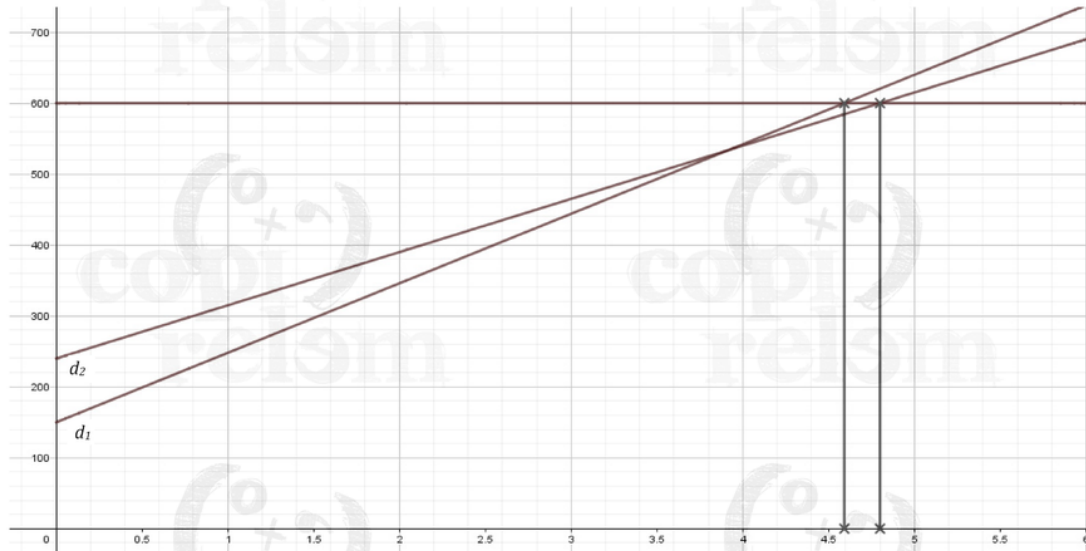
L'ordonnée de ces points correspond au prix à payer pour l'achat de zéro m^3 , c'est-à-dire seulement le prix de la livraison.

d_1 est donc la représentation graphique de la fonction f exprimant le prix à payer à l'entrepreneur A, et d_2 est la représentation graphique de la fonction g exprimant le prix à payer à l'entrepreneur B.

2) c) Volume maximum de béton que l'on peut commander avec 600 €

Pour déterminer graphiquement une valeur approchée du volume de béton que l'on peut commander avec 600 €, on lit sur le graphique l'abscisse des points d'ordonnée 600 de d_1 et d_2 : environ 4,6 pour d_1 et environ 4,8 pour d_2 .

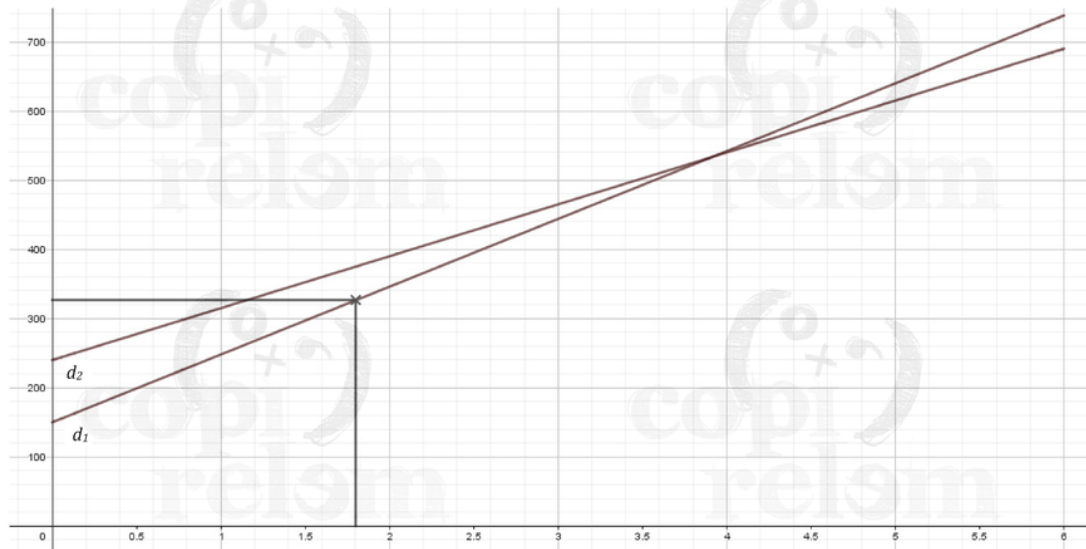
Avec 600 €, on peut commander au maximum environ 4,8 m³, en choisissant l'entrepreneur B.

**2) d) Prix à payer pour réaliser la dalle**

Le volume du trou pour la dalle est de 1,8 m³.

On lit sur le graphique que le point de d_1 d'abscisse 1,8 est en dessous du point de d_2 d'abscisse 1,8. Cela signifie que pour la commande permettant de réaliser la dalle de l'apprenti, l'entrepreneur A est moins cher que l'entrepreneur B.

Pour lire graphiquement le prix facturé avec l'entrepreneur A de 1,8 m³ de béton, on lit environ 320 pour l'ordonnée du point de d_1 d'abscisse 1,8.



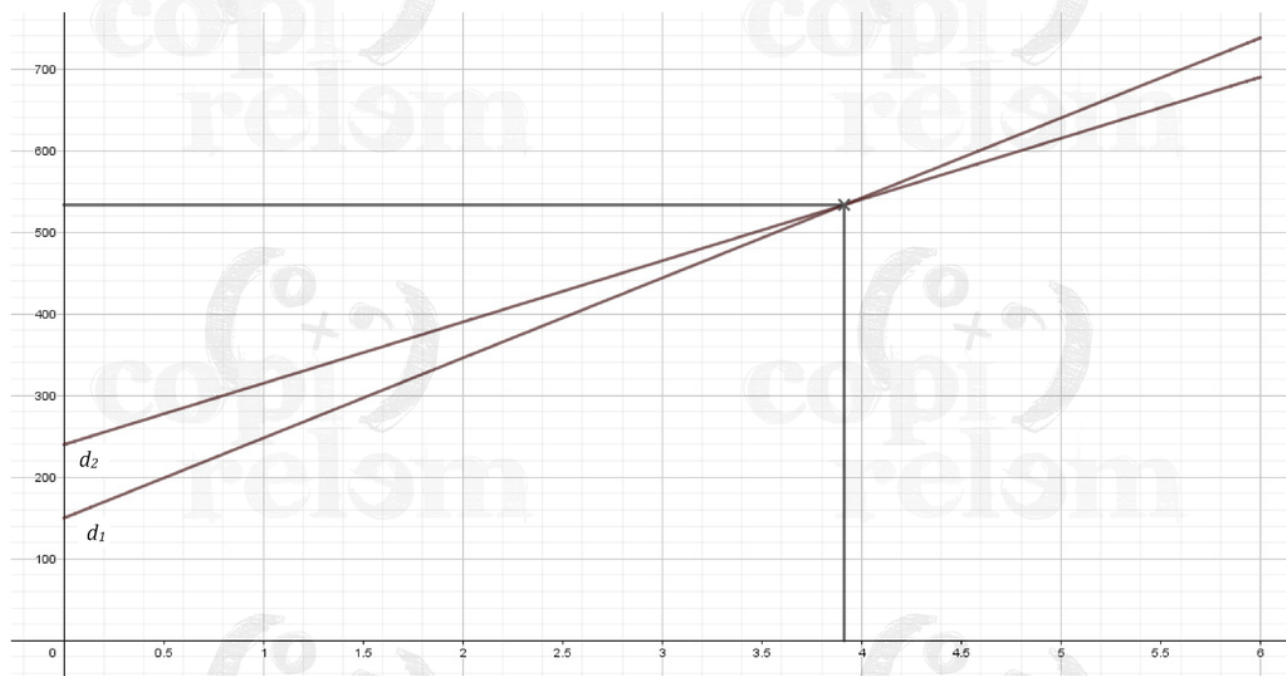
Il est demandé de calculer le prix à payer, c'est-à-dire pour l'entrepreneur A :

$$98 \text{ €} \times 1,8 + 150 \text{ €} = 326,40 \text{ €}.$$

Le prix à payer pour l'achat de béton nécessaire à la réalisation de la dalle est 326,40 euros.

2) e) Calcul du prix le plus intéressant

Les droites d_1 et d_2 se coupent en un point dont l'abscisse est environ 3,8. À partir de cette abscisse, les points de d_2 sont en dessous de ceux de d_1 . Ce qui signifie que le prix de l'entrepreneur B devient plus intéressant que le prix de l'entrepreneur A.



Déterminons par le calcul l'abscisse du point d'intersection de d_1 et d_2 , c'est le volume x pour lequel le prix facturé par l'entrepreneur A est égal au prix facturé par l'entrepreneur B.

On a alors :

$$98x + 150 = 75x + 240$$

$$98x - 75x = 240 - 150$$

$$23x = 90$$

$$x = \frac{90}{23}$$

$$\text{soit } x \approx 3,91.$$

Donc, si on travaille au dixième de mètre cube près, pour 3,9 m³ de béton, c'est l'entrepreneur A qui a le prix le plus intéressant alors que pour 4 m³ de béton, c'est l'entrepreneur B qui devient plus intéressant.

La valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m³.

Autre méthode

On peut aussi chercher les valeurs du volume x pour lesquelles le prix facturé par l'entrepreneur A est inférieur ou égal au prix facturé par l'entrepreneur B. On résout alors l'inéquation :

$$98x + 150 \leq 75x + 240 \text{ avec } x \leq 7 \text{ m}^3.$$

On obtient :

$$23x \leq 90$$

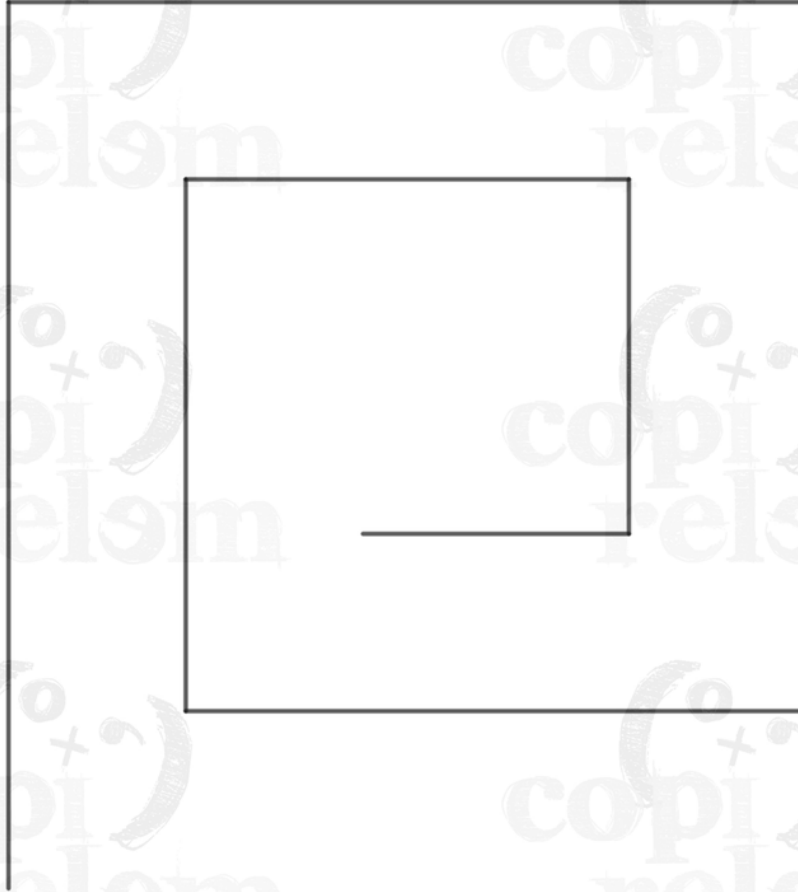
$$\text{soit } x \leq \frac{90}{23}.$$

$$\text{Or } \frac{90}{23} \approx 3,91 \text{ soit } 3,9 < \frac{90}{23} < 4.$$

Donc la valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m³.

L'exercice porte sur la compréhension et la modification d'un programme avec le logiciel Scratch.

1) Tracé de la figure obtenue en lançant le programme Scratch



Remarques

Le premier segment a pour longueur 3 cm, car la variable longueur est initialisée à 20, puis augmentée de 10 à l'entrée dans la boucle, avant le premier tracé.

La boucle comprend 8 itérations, il y a donc 8 segments en tout, de mesures de longueur respectives exprimées en cm : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

La direction de départ est donnée dans l'énoncé « le premier tracé se fait horizontalement vers la droite ». Il aurait pu être intégré au programme avec l'instruction "s'orienter en direction de 90".

2) Figure obtenue en supprimant la ligne 6

Si on supprime la ligne 6, la longueur des segments ne sera plus modifiée et tous les segments auront pour longueur 3 cm.

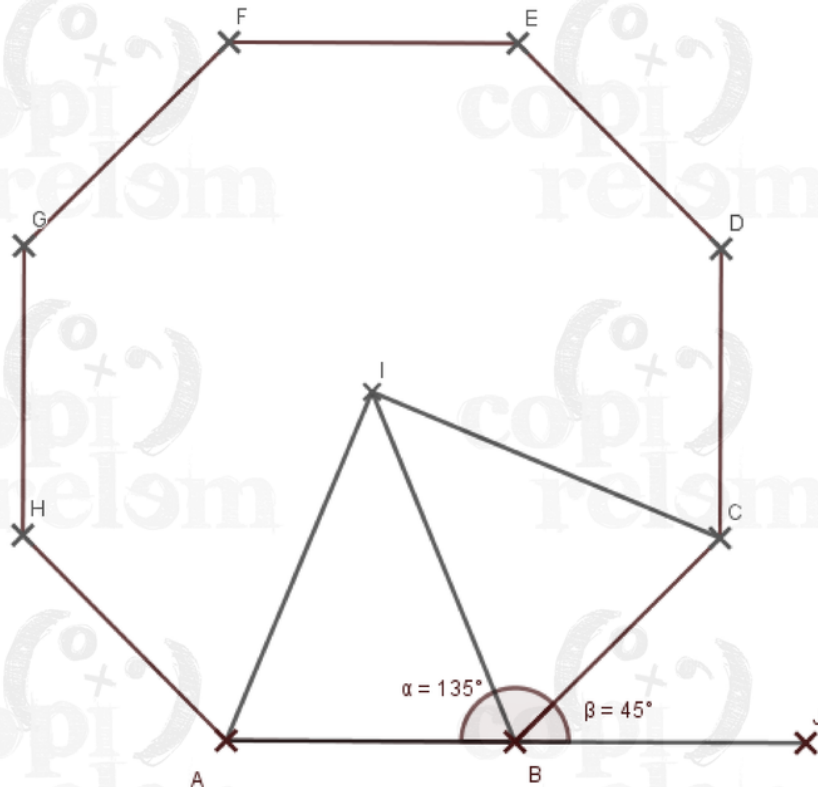
On obtiendra donc un carré de côté 3 cm, sur lequel le lutin aura repassé deux fois.

3) Obtenir un octogone régulier

Un octogone régulier a 8 côtés de même longueur et 8 angles au centre de 45° .

On **modifie l'instruction 3** « mettre longueur à 20 » en « mettre longueur à 40 », car le côté de l'octogone doit être de 40 pixels.

On **supprime l'instruction 6** car la longueur des côtés d'un octogone régulier est toujours la même.



Dans l'octogone régulier ABCDEFGH de centre I, l'angle $\widehat{AIB}$ est égal à 45° ($360^\circ \div 8$). Le triangle AIB est isocèle en I et on a donc $\widehat{ABI} = 67,5^\circ$; on en déduit que $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Lorsque le lutin se déplace de A à B pour, qu'à partir de B, il se dirige dans la direction de C, il doit tourner de $180^\circ - 135^\circ$ soit 45° .

On **modifie donc l'instruction 8** « tourner de 90 degrés » en « tourner de 45 degrés ».

Ainsi l'on obtient un octogone régulier de côté 40 pixels.

Voici le script :



Remarque

Les copies d'écran du logiciel Scratch correspondent à la version disponible en ligne.

1) Vitesse retenue pour une vitesse moyenne de 123 km/h

D'après le document 3, quand la vitesse moyenne est supérieure à 100 km/h, la vitesse retenue est la vitesse moyenne diminuée de 5 %.

Pour diminuer de 5 %, on multiplie par $1 - \frac{5}{100}$, soit 0,95.

$$123 \times 0,95 = 116,85.$$

Pour la vitesse moyenne calculée de 123 km/h, la vitesse retenue est de 116,85 km/h.

2) Vitesse retenue pour un parcours en 4 minutes de la distance entre les deux radars

D'après le document 1, la distance entre les deux points de détection du véhicule est de 5,1 km. Le véhicule a parcouru cette distance en 4 minutes.

$$4 \text{ min} = \frac{4}{60} \text{ h}$$

La relation liant vitesse (V), durée de parcours (T) et distance parcourue (D) est :

$$V = \frac{D}{T}$$

$$\text{soit } V = \frac{5,1 \text{ km}}{\frac{4}{60} \text{ h}} = 5,1 \times \frac{60}{4} \text{ km/h} = 76,5 \text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne du véhicule est de 76,5 km/h.

Cette vitesse étant inférieure à 100 km/h, on calcule la vitesse retenue en soustrayant 5 km/h à la vitesse calculée :

$$76,5 \text{ km/h} - 5 \text{ km/h} = 71,5 \text{ km/h}.$$

Pour un véhicule parcourant en 4 minutes la distance entre les deux points d'enregistrement, la vitesse retenue est 71,5 km/h.

3) Calcul de la vitesse moyenne par une vitesse retenue de 114 km/h

La vitesse retenue est supérieure à 100 km/h, elle a donc été diminuée de 5 %, c'est à dire multipliée par 0,95. Pour retrouver la vitesse moyenne, on divise la vitesse retenue par 0,95 :

$$114 \text{ km/h} \div 0,95 = 120 \text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne du véhicule calculée par l'ordinateur était de 120 km/h.

Remarque

Une baisse de 5 % n'est pas compensée par une hausse de 5 %.

Autrement exprimé, dans ce cas, il aurait été erroné de chercher la vitesse moyenne calculée en effectuant :

$$114,5 \text{ km/h} \times 1,05.$$

4) Calcul de la vitesse d'un véhicule enregistré par les deux radars**Calcul de la durée entre les instants d'enregistrement**

Pour calculer la durée écoulée entre deux instants, on utilise une des techniques de la soustraction.

Méthode 1 : par complément

$$9 \text{ h } 17 \text{ min } 56 \text{ s} + 4 \text{ min} = 9 \text{ h } 21 \text{ min } 56 \text{ s} ;$$

$$9 \text{ h } 21 \text{ min } 56 \text{ s} + 4 \text{ s} = 9 \text{ h } 21 \text{ min } 60 \text{ s} = 9 \text{ h } 22 \text{ min} ;$$

$$9 \text{ h } 22 \text{ min} + 7 \text{ s} = 9 \text{ h } 22 \text{ min } 07 \text{ s}.$$

La durée entre 9 h 17 min 56 s et 9 h 22 min 07 s est de 4 min + 4 s + 7 s, soit 4 min 11 s.

Méthode 1bis

On aurait aussi pu calculer les durées entre les instants 9 h 17 min 56 s, 9 h 18 min, 9 h 22 min et 9 h 22 min 07s.

$$\text{Soit } 4 \text{ s} + 4 \text{ min} + 7 \text{ s} = 4 \text{ min } 11 \text{ s}.$$

Méthode 2 : technique dite « de l'emprunt »

9 h 22 min 07 s – 9 h 17 min 56 s

On ne peut pas soustraire 56 s à 7 s.

$9\text{ h }22\text{ min }07\text{ s} - 9\text{ h }17\text{ min }56\text{ s} = 9\text{ h }21\text{ min }67\text{ s} - 9\text{ h }17\text{ min }56\text{ s}.$

On a "échangé" une des 22 minutes contre 60 secondes, de façon à rendre possible la soustraction des secondes : $67\text{ s} - 56\text{ s} = 11\text{ s}.$

Donc $9\text{ h }22\text{ min }07\text{ s} - 9\text{ h }17\text{ min }56\text{ s} = 4\text{ min }11\text{ s}.$

Remarque 1

Cette technique est parfois aussi appelée « par passage ».

Remarque 2

La conversion en seconde des horaires fournis est ici une technique possible mais trop coûteuse.

Entre 9 h 17 min 56 s et 9 h 22 min 07 s, il s'est donc écoulé 4 minutes et 11 secondes, ce qui correspond à $4 \times 60\text{ s} + 11\text{ s}$ soit 251 s.

Convertissons cette durée exprimée en s en h :

$$251\text{ s} = \frac{251}{3\,600}\text{ h}.$$

D'où le calcul de la vitesse moyenne en km/h :

$$V = \frac{5,1\text{ km}}{\frac{251}{3\,600}\text{ h}} = 5,1 \times \frac{3\,600}{251}\text{ km/h} \approx 73,15\text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne de ce véhicule est de 73,15 km/h. La vitesse retenue est donc de 68,15 km/h.

D'après le document 1, la vitesse est limitée à 70 km/h sur ce tronçon.

Le véhicule ne sera donc pas sanctionné par une contravention.

Remarque

On peut calculer la vitesse en km/s et trouver environ 0,02 km/s puis convertir cette vitesse en km/h en multipliant par 3 600. On perd de la précision avec les arrondis et il faut par conséquent garder toutes les valeurs de la calculatrice avant la multiplication par 3600.

Calcul du volume d'un cube :

$$5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3 = 0,000125 \text{ m}^3.$$

Remarque

Pour faciliter les conversions, on peut s'appuyer sur les relations entre les unités de longueur et les propriétés du calcul sur les puissances :

$$125 \text{ cm}^3 = 125 \times (10^{-2} \text{ m})^3 = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Méthode 1 : comparaison des masses des cubes

Calcul de la masse en g d'un cube en fer :

$$7\,860 \text{ kg/m}^3 \times 0,000125 \text{ m}^3 = 0,9825 \text{ kg} = 982,5 \text{ g}.$$

Calcul de la masse en g d'un cube en nickel :

$$8\,900 \text{ kg/m}^3 \times 0,000125 \text{ m}^3 = 1,1125 \text{ kg} = 1\,112,5 \text{ g}.$$

Le cube de 1110 g que l'on a pesé est donc un cube en nickel, car sa masse est plus proche de celle trouvée en calculant avec la masse volumique du nickel.

Méthode 2 : comparaison de masses volumiques

On peut calculer la masse volumique du cube et la comparer à celle du fer et du nickel :

$$\text{masse volumique du cube} = \frac{\text{masse du cube}}{\text{volume du cube}}.$$

Soit pour le cube pesé : $\frac{1,110 \text{ kg}}{0,000125 \text{ m}^3} = 8\,880 \text{ kg/m}^3$.

La masse volumique trouvée est plus proche de celle du nickel que celle du fer.

Le cube pesé est donc en nickel.

Remarque

Les valeurs trouvées ne donnent pas exactement le résultat, on peut émettre l'hypothèse que la masse pesée du cube n'est pas tout à fait exacte ou que la balance n'est pas suffisamment précise.

1) Recherche de l'âge médian

Construisons le tableau des effectifs cumulés croissants :

Age	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Effectifs	1	4	7	4	4	8	16	10	6
Effectifs cumulés croissants	1	5	12	16	20	28	44	54	60

L'effectif total est de 60 personnes. La médiane est donc l'âge moyen entre la 30^{ème} et la 31^{ème} personne. La 30^{ème} et la 31^{ème} personne ont toutes les deux 20 ans.

L'âge médian est donc 20 ans.

2) Calcul de pourcentage

Le nombre de personnes de moins de 18 ans est 16.

Rapporté au total de 60 personnes, on calcule le pourcentage : $\frac{16}{60} \times 100 \approx 27$ (arrondi à l'unité).

Le pourcentage, arrondi à l'unité, de membres du club qui ont moins de 18 ans est 27 %.

3) Calcul de probabilités**3) a) Probabilité pour que le gagnant ait 22 ans**

Chaque billet a la même probabilité d'être tiré, qui est de $\frac{1}{60}$.

Les tirages étant équiprobables, la probabilité d'un événement est donnée par :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement}}{\text{nombre total de cas}}$$

Il y a 6 personnes de 22 ans. La probabilité pour que le gagnant ait 22 ans est de $\frac{6}{60}$.

3) b) Probabilité pour que le gagnant ait au moins 18 ans

Le nombre de personnes ayant au moins 18 ans est : $4 + 8 + 16 + 10 + 6 = 44$.

La probabilité pour que le gagnant ait au moins 18 ans est de $\frac{44}{60}$ soit $\frac{11}{15}$.

Remarque

Pour dénombrer les gagnants d'au moins 18 ans on peut également soustraire du nombre total de membres ceux qui ont au plus 17 ans ($60 - 16$).