

## A - Situation des trois carrés

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, et toutes les mesures d'aire sont exprimées en  $\text{cm}^2$ .

### 1) Vérification de l'égalité des aires

La mesure de l'aire du petit carré gris (exprimée en  $\text{cm}^2$ ) est :  $3 \times 3 = 9$ .

La mesure de l'aire du grand carré gris est :  $4 \times 4 = 16$ .

La mesure de l'aire du carré blanc est :  $5 \times 5 = 25$ .

Or :  $9 + 16 = 25$ .

Donc la somme des mesures des aires des deux carrés gris est égale à la mesure de l'aire du carré blanc.

*Remarque*

Le sujet indique « la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc », la réponse se fait grâce à la mesure des aires dans l'unité  $\text{cm}^2$ . Pour répondre en restant dans le cadre de la grandeur « aire », la réponse se ferait par découpage et recollement sans chevauchement, ce qui n'est pas envisageable au concours.

### 2) L'affirmation de Claude

*Remarque*

Dans un premier temps, il s'agit de comprendre que dans la figure 1, le carré AEFC est une copie du petit carré gris de la question précédente, que le carré ABGD est une copie du grand carré gris de la question précédente et le carré BCHI une copie du carré blanc de la question précédente.

Dans cette question, on s'interroge sur la nature du triangle ABC formé en prenant un sommet de chacun des carrés respectivement.

Pour cela on cherche à savoir si l'égalité (E) est vérifiée :  $AC^2 + AB^2 = BC^2$  (E).

Or les mesures (en centimètres) de ces différentes longueurs sont :  $AC = 3$ ,  $AB = 4$  et  $BC = 5$ .

Dans la question précédente, nous avons vérifié que :  $9 + 16 = 25$ .

Ainsi l'égalité (E) est vérifiée.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

**L'affirmation de Claude est vraie.**

### 3) L'affirmation de Dominique

*Remarque*

La figure 2 comporte un implicite important : les points M, J et P sont alignés. Ce qui implique que les droites (IJ) et (PN) sont parallèles (puisque perpendiculaires à la même droite (MP)).

La stratégie consiste à calculer les mesures de MN et de IJ.

Les points M, J et P sont supposés alignés. Ainsi, le triangle MPN est rectangle en P (l'angle droit provient du carré blanc). On sait que les côtés des carrés gris ont pour mesures respectives 3 et 4 et que celui du carré blanc a pour mesure 5. Ainsi :  $MP = 3 + 4 + 5 = 12$ .

Et :  $PN = 5$ .

*Calcul de MN*

Le théorème de Pythagore dans le triangle MPN, rectangle en P donne :  $MN^2 = MP^2 + PN^2$ .

Ainsi :  $MN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ .

On en déduit :  $MN = 13$ .

**MN est un nombre entier naturel, donc un nombre décimal.**

## Calcul de IJ

Les points M, J et P sont alignés dans cet ordre. Les points M, I et N sont alignés dans cet ordre. Les droites (IJ) et (NP) sont (supposément) parallèles. Ainsi les triangles MIJ et MNP sont en configuration de Thalès.

Le théorème de Thalès implique l'égalité suivante :  $\frac{IJ}{NP} = \frac{MJ}{MP}$ .

On en déduit :  $IJ = NP \times \frac{MJ}{MP} = 5 \times \frac{3}{12} = \frac{5}{4}$ .

Le nombre fractionnaire  $\frac{5}{4}$  est-il un nombre décimal ?

## Méthode 1 : expression du nombre rationnel sous forme de fraction décimale

On peut écrire :  $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100}$ .

La fraction  $\frac{125}{100}$  est une fraction décimale (son dénominateur est une puissance de dix). Elle représente donc un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

## Méthode 2 : expression du nombre rationnel sous forme d'écriture à virgule ayant un nombre fini de chiffres

Si on calcule  $\frac{5}{4}$ , on obtient 1,25 qui est l'expression d'un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

## Méthode 3 : reconnaissance directe à partir de la fraction rationnelle

$\frac{5}{4}$  est une fraction qui s'écrit sous la forme  $\frac{a}{2^p 5^q}$ , avec a, p et q des nombres entiers :

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{2^2 \times 5^0}$$

Donc  $\frac{5}{4}$  est un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

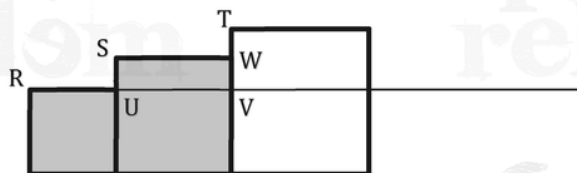
Puisque MN et IJ sont des nombres décimaux, l'affirmation de Dominique est vraie.

## 4) Affirmation de Camille

### Remarque

La figure 3 comporte un implicite important : les carrés sont positionnés comme sur la figure 2 (alignement des côtés de base).

Dans la figure 3, on considère les points U, V et W suivants :



On a :  $RU = 3$  ;  $SW = UV = 4$  ;  $SU = 4 - 3 = 1$  ;  $TV = 5 - 3 = 2$  ;  $TW = 5 - 4 = 1$ .

Par ailleurs, les triangles RSU, RTV et STW sont rectangles respectivement en U, V et W.

## Méthode 1 : mise en œuvre du théorème de Pythagore

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc :  $RS = \sqrt{10}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc :  $RT = \sqrt{53}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle STW, rectangle en W, on a :

$$ST^2 = SW^2 + WT^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17.$$

Donc :  $ST = \sqrt{17}$ .

Si les points R, S et T sont alignés, alors l'égalité suivante est vérifiée :  $RS + ST = RT$ .

Or:  $\sqrt{10} + \sqrt{17} \neq \sqrt{53}$ .

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient :  $\sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 7,285$  et  $\sqrt{53} \approx 7,280$  (valeurs approchées par défaut au millièmè près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;
- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient d'une part :  

$$(\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{17})^2 + 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{17} = 10 + 17 + 2 \times \sqrt{170} = 27 + 2 \times \sqrt{170}.$$

$$(\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{17})^2 + 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{17} = 10 + 17 + 2 \times \sqrt{170} = 27 + 2 \times \sqrt{170}.$$

D'autre part, on a :  $\sqrt{53}^2 = 53$  ;

Or  $\sqrt{170}$  est irréductible, de sorte que les deux carrés ne sont pas égaux. Or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

*Méthode 2 : mise en œuvre des théorèmes de Pythagore puis de Thalès*

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc :  $RS = \sqrt{10}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc :  $RT = \sqrt{53}$ .

Les points R, U et V sont alignés dans cet ordre.

On a :  $\frac{RU}{RV} = \frac{3}{7}$  et  $\frac{RS}{RT} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}}$ .

Or :  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \neq \frac{3}{7}$ .

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient :  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \approx 0,434$  et  $\frac{3}{7} \approx 0,429$  (arrondis au millième près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;
- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient  $\frac{10}{53}$  et  $\frac{9}{49}$  qui sont deux fractions irréductibles non égales ; or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

Si les points R, S et T étaient alignés, le théorème de Thalès serait vérifié. Puisque le théorème de Thalès n'est pas vérifié, les points R, S et T ne sont alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

### Méthode 3 : questionnement sur les triangles semblables

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les triangles RSU et RTV sont semblables.

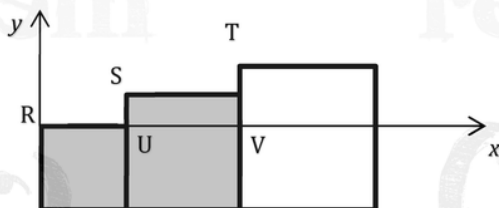
On a :  $\frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$  et  $\frac{TV}{RV} = \frac{2}{7}$

Or :  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$ .

On en déduit que les triangles RSU et RTV ne sont pas semblables.

Ainsi, les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

*Méthode 4 : résolution dans un repère orthonormé.*



On introduit un repère orthonormé dont l'origine se situe (avantageusement) en R et qui est gradué en cm. Les coordonnées des points sont R(0; 0), U(3; 0), V(7; 0), S(3; 1) et T(7; 2).

Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) sont confondues, c'est-à-dire qu'elles ont le même coefficient directeur (elles ont déjà un point commun R).

Le coefficient directeur de la droite (RS) est :  $\frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$ .

Le coefficient directeur de la droite (RT) est :  $\frac{TV}{RV} = \frac{2}{7}$ .

Or  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$  donc les droites (RS) et (RT) ne sont pas confondues.

Ainsi, **les points R, S et T ne sont pas alignés.**

*Méthode 5 : résolution trigonométrique*

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) forment le même angle avec la droite (RU).

On a :  $\tan(\widehat{URS}) = \frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$  et  $\tan(\widehat{VRT}) = \frac{VT}{RV} = \frac{2}{7}$ .

Or :  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$ .

Donc les angles  $\widehat{URS}$  et  $\widehat{VRT}$  ne sont pas égaux. On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés.

**L'affirmation de Camille est fausse.**

## B - Situation des cinq carrés

### 1) Obtention d'une équation

Les mesures des côtés des carrés, exprimées en centimètres, sont des entiers consécutifs. Ainsi les mesures sont respectivement  $(n-2)$ ,  $(n-1)$  et  $n$  pour les carrés gris ;  $(n+1)$  et  $(n+2)$  pour les carrés blancs. La somme des aires des carrés gris exprimées en  $\text{cm}^2$ , est alors :

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + n^2 = 3n^2 - 6n + 5.$$

La somme des aires des carrés blancs exprimées en  $\text{cm}^2$ , est :

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 2n^2 + 6n + 5.$$

La condition « la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs » se traduit par l'égalité :  $3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$ .

Ou encore :  $3n^2 - 2n^2 - 6n - 6n = 0$ .

Soit :  $n^2 - 12n = 0$ .

**Résoudre le problème revient donc à résoudre l'équation  $n^2 - 12n = 0$ .**

*Remarque*

Le vocabulaire utilisé pour cette question pourrait laisser penser que le problème « recherche des cinq carrés » est équivalent au problème « résolution de l'équation  $n^2 - 12n = 0$  », alors qu'il n'en est rien comme le prouvent les questions suivantes.

### 2) Solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$

Après factorisation par  $n$ , l'équation  $n^2 - 12n = 0$  s'écrit :  $n \times (n - 12) = 0$ .

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul.

Ainsi le produit  $n \times (n - 12)$  est nul si et seulement si : soit  $n = 0$ , soit  $n - 12 = 0$ .

**Les solutions de l'équation  $n^2 - 12n = 0$  sont donc  $n = 0$  et  $n = 12$ .**

### 3) Les solutions à retenir

La solution de l'équation  $n = 0$  ne peut pas donner une solution au problème des cinq carrés.

En effet les mesures des côtés des carrés sont à chercher parmi les nombres positifs.

Or  $n - 1$  et  $n - 2$  sont (strictement) négatifs dans le cas  $n = 0$ .

La solution de l'équation  $n = 12$  donne une solution au problème des cinq carrés.

En effet les nombres entiers  $12 - 2$ ,  $12 - 1$ ,  $12$ ,  $12 + 1$  et  $12 + 2$  sont consécutifs et positifs.

On peut également vérifier que :  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ .

D'autre part, on a :  $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$ .

Ceci prouve que le quintuplet (10, 11, 12, 13, 14) est solution du problème des cinq carrés.

#### 4) Figure à l'échelle $\frac{1}{5}$

Les mesures des côtés des carrés solutions sont, en centimètres : 10, 11, 12, 13 et 14.

À l'échelle  $\frac{1}{5}$ , les mesures des côtés des représentants des carrés solutions sont, en centimètres :

$$10 \times \frac{1}{5} = 2 ; 11 \times \frac{1}{5} = 2,2 ; 12 \times \frac{1}{5} = 2,4 ; 13 \times \frac{1}{5} = 2,6 \text{ et } 14 \times \frac{1}{5} = 2,8.$$

Ce qui donne la figure suivante :



### C - Situation des sept carrés

#### 1) Interprétation graphique

Résoudre le problème des sept carrés revient à identifier le(s) nombre(s) entiers  $x$  pour lesquels il y a égalité des sommes des aires des carrés gris et des carrés blancs (exprimées en fonction de  $x$ ). Ceci revient à résoudre l'équation  $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$  et à ne considérer que les solutions  $x_0$  telles que les nombres  $(x_0 - 6, x_0 - 5, x_0 - 4, x_0 - 3, x_0 - 2, x_0 - 1, x_0)$  sont des entiers naturels consécutifs.

Or, résoudre l'équation  $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$  revient à résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ , ce qui, graphiquement, revient à regarder si les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  se coupent en un point dont l'abscisse est un nombre entier positif plus grand que 6 (pour que  $x - 6$  soit positif).

Sur le graphique présenté, les courbes se coupent en deux points, l'un ayant une abscisse comprise entre 2 et 4 et l'autre ayant une abscisse comprise entre 26 et 28 (et qui semble être 27).

Ainsi, la situation des sept carrés semble avoir au moins une solution.

#### 2) Vérification

Pour  $x = 27$ , les nombres entiers (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) sont consécutifs.

De plus :  $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030$  et  $25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030$ .

Ceci prouve que l'heptuplet (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) est solution du problème des sept carrés.

### D - Situation des carrés

#### 1) Feuilles de calculs

Dans chacune des feuilles de calcul la colonne A donne des valeurs pour le côté du premier carré (sous-entendu le plus petit). La colonne B donne l'aire du premier carré. La colonne C donne l'aire du second carré, calculé à partir de la mesure de son côté obtenu comme la mesure du côté du petit carré à laquelle on a ajouté 1. Et ainsi de suite jusqu'à la colonne E.

Dans la feuille de calcul A, on regarde la ligne 2, et sur cette ligne, on se concentre sur la cellule F2. L'aire de la partie grise (F2) est obtenue comme somme des valeurs des cellules B2 (aire du premier carré) et E3 (aire du 4<sup>ième</sup> carré). Ainsi, cette feuille de calcul est associée au cas 1.

Par déduction, la feuille A correspond au cas 1 et la feuille B correspond au cas 2.

*Remarque*

Il n'est pas utile de vérifier précisément que la feuille B correspond au cas 2, mais pour se rassurer on peut vérifier qu'effectivement dans le cas de feuille B, la cellule F2 correspond à la somme des cellules B2, C2 et D2.

**2) a) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule E2**

Pour calculer l'aire du quatrième carré (colonne E) à partir de la longueur du côté du premier (colonne A), il faut connaître la longueur du côté du quatrième carré. Or la longueur du côté du deuxième carré est obtenue en ajoutant 1 à celle du premier, puis celle du troisième carré en ajoutant 1 à celle du deuxième,... La longueur du côté du quatrième carré est donc obtenue en ajoutant 3 à celle du premier carré. Les formules suivantes pourraient convenir :

$$=(A2+3)*(A2+3)$$

$$=(A2+3)^2$$

$$=($A2+3)*($A2+3)$$

$$=($A2+3)^2$$

$$=($A2+3)*(A2+3)$$

$$=(A2+3)*($A2+3)$$

*Remarque*

On pourrait également envisager les formules obtenues en remplaçant  $A2+3$  par  $D2+1$  ou  $C2+2$  ou  $B2+1$  dans les formules ci-dessus. Bien entendu, ces dernières formules ne sont valables que si les cases B2, C2 et/ou D2 sont renseignées correctement en référence à la cellule A2.

**2) b) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule F2**

La colonne F présente les résultats des sommes des aires deux carrés grisés, c'est-à-dire des aires du premier et du quatrième carré.

Les formules suivantes pourraient convenir :

$$=B2+E2$$

$$=$B2+$E2$$

$$=B2+$E2$$

$$=$B2+E2$$

*Remarque*

On pourrait envisager beaucoup d'autres formules valables mais celles présentées sont les formules les plus cohérentes.

**3) Conjectures**

Pour la feuille de calcul A qui correspond au cas 1, on remarque que sur les valeurs données, il y a un écart constant de 4 unités d'aire entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche.

**Conjecture 1 : la différence entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche est constante égale à  $4 \text{ cm}^2$  donc le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.**

Pour la feuille de calcul B qui correspond au cas 2.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

Pour  $n = 1$ , l'aire de la partie grise est plus petite que l'aire de la partie blanche.

Pour  $n = 2$ , l'aire de la partie grise est plus grande que l'aire de la partie blanche.

Pour les valeurs plus grandes de  $n$ , l'aire de la partie grise est toujours plus grande que l'aire de la partie blanche.

**Conjecture 2 : le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**

**4) Démonstration**

On appelle  $n$  la longueur en cm du côté du plus petit carré ( $n$  est un nombre entier naturel).

**Cas 1**

L'aire de la partie grise vaut :  $n^2 + (n + 3)^2 = n^2 + n^2 + 6n + 9 = 2n^2 + 6n + 9$ .

L'aire de la partie blanche vaut :  $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 2n^2 + 6n + 5$ .

La différence des deux aires vaut :  $(2n^2 + 6n + 9) - (2n^2 + 6n + 5) = 4$ .

Ainsi, quelle que soit la valeur de  $n$ , la différence est constante et toujours égale à 4.

**La conjecture 1 est démontrée. Le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.**

### Cas 2

L'aire de la partie grisée vaut :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 3n^2 + 6n + 5.$$

L'aire de la partie blanche vaut :  $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$ .

*Méthode 1 : à partir de l'égalité entre les aires*

On cherche  $n$ , s'il existe, tel que les deux aires sont égales, c'est-à-dire pour lesquels :

$$(3n^2 + 6n + 5) = (n^2 + 6n + 9)$$

Cette équation est équivalente à :  $2n^2 - 4 = 0$ .

Ou encore à :  $n^2 - 2 = 0$ .

Cette équation possède deux solutions  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ , mais aucune d'entre elles n'est un entier naturel. Par conséquent cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels.

**La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**

*Méthode 2 : à partir de la différence entre les aires*

La différence des deux aires vaut :  $(3n^2 + 6n + 5) - (n^2 + 6n + 9) = 2n^2 - 4$ .

L'égalité des aires des surfaces grises et blanches est obtenue lorsque cette différence est égale à 0, c'est-à-dire pour les entiers  $n$  tels que :  $2n^2 - 4 = 0$ .

Soit lorsque :  $n^2 = 2$ .

Or cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels, donc de tels entiers  $n$  n'existent pas.

**La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**

**Affirmation 1**

Pour pouvoir comparer le pourcentage de tablettes défectueuses pour chaque société, il est nécessaire de connaître pour chacune d'entre elles le nombre total d'appareils défectueux (de types Electrix et Tronix) ainsi que le nombre total de tablettes que ces sociétés fabriquent.

**Calcul du nombre de tablettes par société**

En reprenant les tableaux de l'énoncé :

| Société 1     | Nombre de tablettes<br>(par jour) | Pourcentage moyen de<br>tablettes défectueuses | Nombre moyen de<br>tablettes défectueuses |
|---------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Type Electrix | 2 000                             | 5 %                                            | $2\,000 \times \frac{5}{100} = 100$       |
| Type Tronix   | 7 000                             | 2 %                                            | $7\,000 \times \frac{2}{100} = 140$       |

Au total, la société 1 fabrique 9 000 tablettes ( $2\,000 + 7\,000 = 9\,000$ ) par jour. Parmi ces tablettes, 240 en moyenne sont défectueuses ( $100 + 140 = 240$ ).

| Société 2     | Nombre de tablettes<br>(par jour) | Pourcentage moyen de<br>tablettes défectueuses | Nombre moyen de<br>tablettes défectueuses |
|---------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Type Electrix | 6 000                             | 3 %                                            | $6\,000 \times \frac{3}{100} = 180$       |
| Type Tronix   | 1 000                             | 2 %                                            | $1\,000 \times \frac{2}{100} = 20$        |

Au total, la société 2 fabrique 7 000 tablettes ( $6\,000 + 1\,000 = 7\,000$ ) par jour. Parmi ces tablettes, 200 en moyenne sont défectueuses ( $180 + 20 = 200$ ).

**Calcul du pourcentage de tablettes défectueuses par société**

Méthode 1 : mise en œuvre du produit en croix

On exprime les données relatives à chacune des sociétés dans un tableau de proportionnalité :

| Société 1           |                                                                              | Société 2           |                                                                               |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Nombre de tablettes | Nombre moyen de tablettes défectueuses                                       | Nombre de tablettes | Nombre moyen de tablettes défectueuses                                        |
| 9 000               | 240                                                                          | 7 000               | 200                                                                           |
| 100                 | $\frac{240 \times 100}{9\,000} \approx 2,67$<br>(par excès au centième près) | 100                 | $\frac{200 \times 100}{7\,000} \approx 2,85$<br>(par défaut au centième près) |

Ainsi le pourcentage moyen d'appareils défectueux est d'au plus 2,67 % pour la société 1, alors qu'il est d'au moins 2,85 % pour la société 2. Par conséquent, ce pourcentage est le plus faible pour la société 1.

**L'affirmation 1 est donc vraie.**

Méthode 2 : calculs directs

Chaque jour, la société 1 constate en moyenne 240 appareils défectueux sur les 9 000 fabriqués, ce qui représente le pourcentage moyen suivant (valeur approchée par excès au centième près) :

$$\frac{240}{9\,000} \times 100 \approx 2,67$$

Chaque jour, la société 2 constate en moyenne 200 appareils défectueux sur les 7 000 fabriqués, ce qui représente le pourcentage moyen suivant (valeur approchée par défaut au centième près) :

$$\frac{200}{7\,000} \times 100 \approx 2,85$$

Ainsi le pourcentage moyen d'appareils défectueux est d'au plus 2,67 % pour la société 1, alors qu'il est d'au moins 2,86 % pour la société 2. Par conséquent, ce pourcentage est le plus faible pour la société 1.

**L'affirmation 1 est donc vraie.**

### Affirmation 2

*Méthode 1 : exhibition d'un contre-exemple à partir de la longueur de l'arête*

Si la longueur de l'arête du cube est égale à 1 cm, l'aire d'une face carrée de ce cube est alors égale à 1 cm<sup>2</sup>.

Par conséquent, l'aire de ce cube est égale à :  $6 \times 1 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$ .

Le volume de ce cube est de 1 cm<sup>3</sup>.

Ainsi pour une aire égale à 6 cm<sup>2</sup> le volume du cube est égal à 1 cm<sup>3</sup>.

Si la longueur du côté du carré est égale à 2 cm, l'aire d'une face carrée de ce cube est alors égale à 4 cm<sup>2</sup>.

Par conséquent, l'aire du cube est égale à :  $6 \times 4 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ .

Le volume de ce cube est de 8 cm<sup>3</sup>.

Ainsi pour une aire égale à 24 cm<sup>2</sup>, le volume du cube est égal à 8 cm<sup>3</sup>.

On en déduit que lorsqu'on a multiplié l'aire du cube par 4 (l'aire est passée de 6 cm<sup>2</sup> à 24 cm<sup>2</sup>), le volume du cube a été multiplié par 8 (le volume est passé de 1 cm<sup>3</sup> à 8 cm<sup>3</sup>).

On en déduit que le volume du cube n'est pas proportionnel à son aire.

**L'affirmation 2 est donc fausse.**

*Méthode 2 : mise en évidence du non respect de la propriété de linéarité multiplicative*

On appelle  $x \text{ cm}^2$  l'aire du cube. On en déduit que l'aire d'une des faces du cube est égale à :  $\frac{x}{6} \text{ cm}^2$ .

Donc la longueur d'une arête est égale à :  $\sqrt{\frac{x}{6}} \text{ cm}$ .

On en déduit le volume du cube :  $\left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3$ .

Si l'aire du cube est multipliée par deux, alors l'aire d'une des faces de ce cube est égale à :  $\frac{2 \times x}{6} \text{ cm}^2$ .

La longueur d'une arête est alors égale à :  $\sqrt{\frac{2 \times x}{6}} \text{ cm}$  et le volume du cube devient :

$$\left(\sqrt{\frac{2 \times x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3 = \left(\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3 = (\sqrt{2})^3 \times \left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

Or :  $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ .

Par conséquent le volume du cube est multiplié par  $2\sqrt{2}$  (et non pas par 2). On en déduit que le volume du cube n'est pas proportionnel à son aire.

**L'affirmation 2 est donc fausse.**

*Méthode 3 : explicitation de la fonction qui associe le volume du cube à son aire*

En reprenant les notations de la méthode 2, on exprime le volume du cube (exprimé en cm<sup>3</sup>) en fonction de son aire (exprimée en cm<sup>2</sup>) notée  $x$ . Notons  $f$  cette fonction :  $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3$ . Cette fonction n'est pas une fonction linéaire puisqu'elle ne s'écrit pas sous la forme :  $f(x) = a \times x$  (où  $a$  désigne un nombre réel).

*Remarque*

Pour justifier que  $f$  n'est pas une fonction linéaire, on peut aussi montrer que  $f$  ne vérifie pas la propriété multiplicative de linéarité en montrant par exemple que :  $f(2 \times x) \neq 2 \times f(x)$  (on pourra se référer aux calculs de la méthode 2).

Par conséquent la situation représentée par cette fonction n'est pas une situation de proportionnalité.

**L'affirmation 2 est donc fausse.**

**Affirmation 3***Méthode 1 : calculs avec conversion des mesures en L*Puisque  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ , on peut exprimer la capacité du récupérateur d'eau en L :

$$0,3 \text{ m}^3 = 0,3 \times 1\,000 \text{ dm}^3 = 300 \text{ L}$$

Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser  $1 \text{ m}^2$ .Pour arroser un potager de  $5 \text{ m}^2$ , il faut donc :  $5 \times 15 \text{ L} = 75 \text{ L}$ .Or :  $300 \text{ L} = 4 \times 75 \text{ L}$ .

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

**L'affirmation 3 est donc vraie.***Méthode 2 : calculs avec conversion des mesures en  $\text{dm}^3$* Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser  $1 \text{ m}^2$ . Puisque  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ , on a :  $15 \text{ L} = 15 \text{ dm}^3$ .Pour arroser un potager de  $5 \text{ m}^2$ , il faut donc :  $5 \times 15 \text{ dm}^3 = 75 \text{ dm}^3$ .Par ailleurs :  $0,3 \text{ m}^3 = 300 \text{ dm}^3 = 4 \times 75 \text{ dm}^3$ .

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

**L'affirmation 3 est donc vraie.***Méthode 3 : calculs avec conversion des mesures en  $\text{m}^3$* Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser  $1 \text{ m}^2$ .Donc, pour arroser une fois le potager, il faut :  $5 \times 15 \text{ L} = 75 \text{ L}$ .Pour l'arroser 4 fois il faut alors :  $4 \times 75 \text{ L} = 300 \text{ L}$ .Or :  $300 \text{ L} = 300 \text{ dm}^3 = 0,3 \text{ m}^3$ .

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

**L'affirmation 3 est donc vraie.****Affirmation 4***Méthode 1 : utilisation d'une identité remarquable*Puisque  $A = 7 + \frac{2}{10}$ , on a :

$$A^2 = \left(7 + \frac{2}{10}\right)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 49 + \frac{28}{10} + \frac{4}{100} = 49 + \left(2 + \frac{8}{10}\right) + \frac{4}{100}.$$

On en déduit que la partie décimale de A est égale à :  $\frac{8}{10} + \frac{4}{100}$ .**Par conséquent, l'affirmation 4 est fausse.***Méthode 2 : calculs*On sait que :  $A = 7 + \frac{2}{10} = 7,2$ .On calcule alors :  $A^2 = 51,84$ .La partie décimale de  $A^2$  est donc égale à :  $0,84 = \frac{84}{100}$ .**Par conséquent, l'affirmation 4 est fausse.**

**1) a) Nombre de fois où Inès a obtenu le nombre 6**

Les occurrences des nombres de 1 à 5 sont données dans le tableau :  $30 + 41 + 32 + 28 + 31 = 162$ .  
Puisqu'Inès a lancé 200 fois le dé, le nombre d'occurrences du nombre 6 est alors :  $200 - 162 = 38$ .  
**Inès a obtenu 38 fois le nombre 6.**

**1) b) Fréquence d'apparition du nombre 1**

Méthode 1 : utilisation du « produit en croix »

| Nombre d'apparitions du chiffre « 1 » | Nombre total de lancers |
|---------------------------------------|-------------------------|
| 30                                    | 200                     |
| $\frac{30 \times 100}{200} = 15$      | 100                     |

**La fréquence d'apparition du nombre 1 est de 15 %.**

Méthode 2 : mise en œuvre de la propriété de linéarité multiplicative

Nous savons que pour 200 lancers, le nombre 1 est apparu 30 fois.  
Par conséquent pour 100 lancers (deux fois moins), le nombre 1 devrait apparaître deux fois moins, soit 15 fois.

**La fréquence d'apparition du nombre 1 est de 15 %.**

Méthode 3 : calcul direct

Nous savons que le nombre 1 est apparu 30 fois sur 200 lancers.

Sa fréquence d'apparition est donc :  $\frac{30}{200} = 0,15$ .

**La fréquence d'apparition du nombre 1 est de 15 %.**

**2) a) Probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9**

Méthode 1 : exploration de tous les possibles

Le tableau suivant présente tous les produits possibles selon les différents jets de dés.

| Produit<br>des deux<br>nombres |   | Premier dé |    |    |    |    |    |
|--------------------------------|---|------------|----|----|----|----|----|
|                                |   | 1          | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Deuxième dé                    | 1 | 1          | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|                                | 2 | 2          | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 |
|                                | 3 | 3          | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 |
|                                | 4 | 4          | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 |
|                                | 5 | 5          | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|                                | 6 | 6          | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

Ce tableau compte 36 cases. Une seule case (grisée) fait apparaître le nombre 9 : elle correspond au jet de dés « 3 » et « 3 ».

**On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à neuf est de  $\frac{1}{36}$ .**

**Méthode 2 : calcul direct de la probabilité**

On étudie la décomposition du nombre 9 en produits de deux facteurs :  $9 = 1 \times 9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$ .  
Un seul de ces produits met en jeu des nombres inférieurs ou égaux à 6. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de dé est équiprobable, avec une probabilité égale à :  $\frac{1}{6}$ .

Par conséquent, la probabilité d'obtenir « 3 » avec chacun des dés est de  $\frac{1}{6}$ .

On en déduit que la probabilité d'obtenir « 3 » et « 3 » est égale à :  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ .

**La probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à neuf est de  $\frac{1}{36}$ .**

**2) b) Probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12**
**Méthode 1 : exploration de tous les possibles**

En reprenant le tableau des possibles élaboré dans la méthode 1 de la question précédente, on constate quatre cases faisant apparaître le nombre 12 (souligné). Il y a donc 4 chances sur 36 cas possibles.

**On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :**

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

**Méthode 1 bis : calcul de la probabilité à partir de l'exploration de tous les possibles**

En reprenant le tableau des possibles élaboré dans la méthode 1 de la question précédente, on constate quatre cases faisant apparaître le nombre 12 (souligné). Chaque case du tableau a une probabilité de réalisation de  $\frac{1}{36}$ .

**On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :**

$$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

**Méthode 2 : calcul direct de la probabilité**

On étudie la décomposition de 12 en produits de deux facteurs inférieurs ou égaux à 6 :

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Quatre décompositions multiplicatives sont possibles, soit quatre jets des deux dés. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de dé a une probabilité égale à :  $\frac{1}{6}$ .

**On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :**

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

**Méthode 2 bis : calcul direct de la probabilité**

On étudie la décomposition de 12 en produits de deux facteurs inférieurs ou égaux à 6 :

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Quatre décompositions multiplicatives sont possibles, soit quatre jets des deux dés. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de deux dés est équiprobable, avec une probabilité égale à :  $\frac{1}{36}$ .

**On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :**

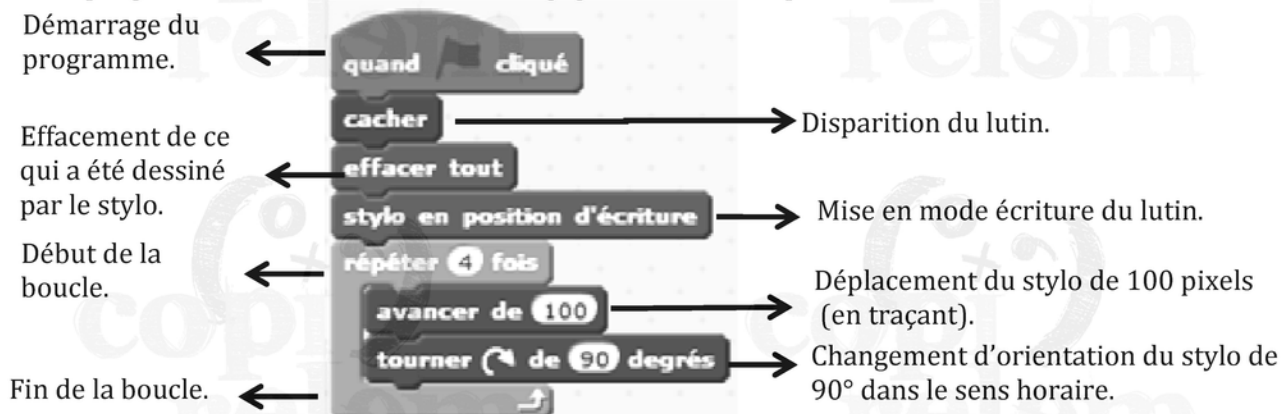
$$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

## 1) Nature de la figure tracée en exécutant le programme A

### Remarque

Ni le détail des actions réalisées par le programme, ni les justifications n'étaient attendus. Nous les donnons ici pour une meilleure compréhension du candidat.

Dans le programme A, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

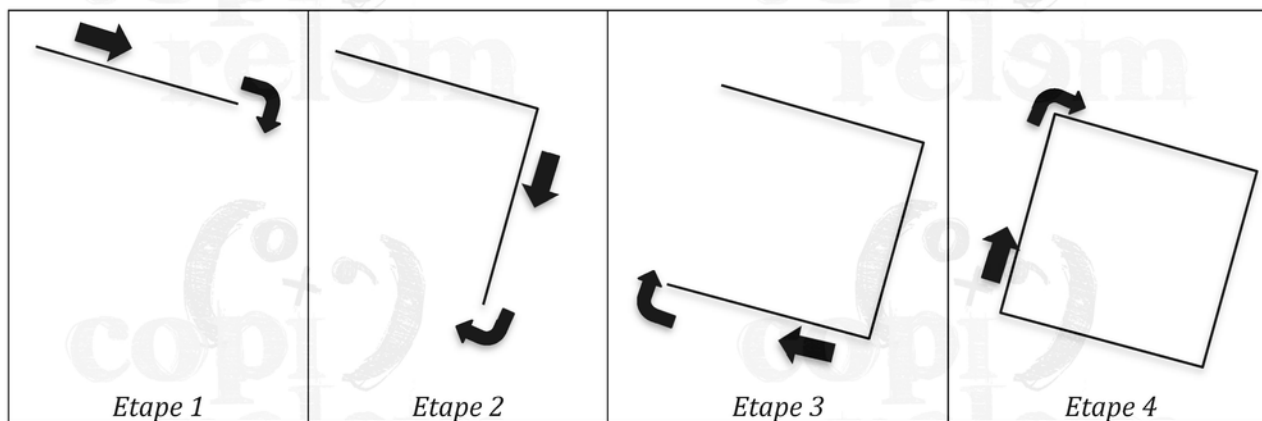


Par conséquent, après avoir fait disparaître le lutin, le programme fait tracer un segment de 100 pixels de longueur avant d'orienter le stylo à 90° dans le sens horaire (*étape 1*).

Un deuxième segment est alors tracé (faisant donc un angle droit avec le précédent) et le stylo orienté à 90° dans le sens horaire (*étape 2*).

Puis un troisième segment est tracé (faisant de même un angle droit avec le deuxième) et le stylo orienté à 90° dans le sens horaire (*étape 3*).

Enfin un quatrième segment est tracé (faisant un angle droit avec le troisième) et le stylo orienté de nouveau à 90° dans le sens horaire (*étape 4*). Alors le stylo retrouve sa position initiale ( $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ ).

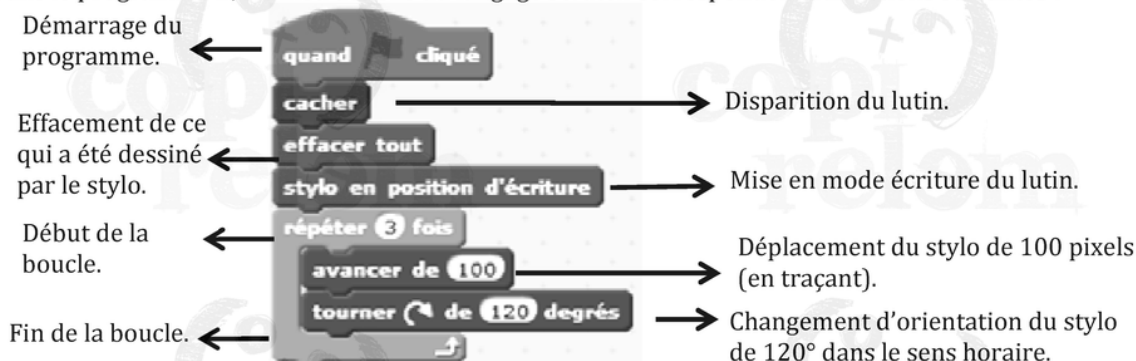


Le polygone ainsi tracé est alors un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur et qui possède quatre angles droits.

On en déduit que le programme A fait tracer un carré de 100 pixels de côté.

**Nature de la figure tracée en exécutant le programme B**

Dans le programme B, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

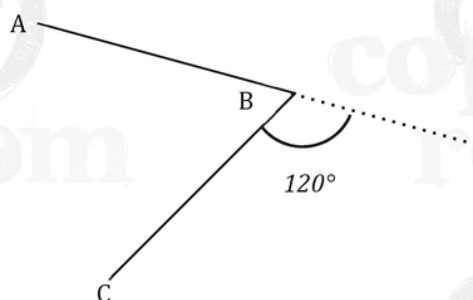


On en déduit qu'après avoir fait disparaître le lutin et effacé ce qui a été précédemment tracé, le programme fait tracer un segment de 100 pixels de longueur avant d'orienter le stylo à  $120^\circ$  dans le sens horaire (étape 1).

Un deuxième segment est alors tracé (faisant donc un angle de  $120^\circ$  avec le précédent) et le stylo orienté à  $120^\circ$  dans le sens horaire (étape 2).

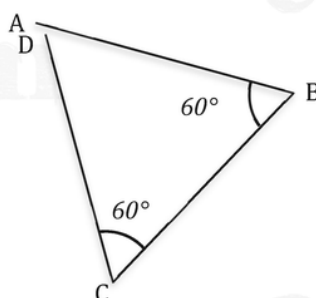
Enfin un troisième segment est tracé (faisant de même un angle de  $120^\circ$  avec le deuxième) et le stylo orienté à  $120^\circ$  dans le sens horaire (étape 3). Alors le stylo retrouve sa position initiale ( $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ ).

Pour plus de précision, on peut comprendre le script scratch de la manière suivante : le programme fait tracer deux segments successifs de même longueur (100 pixels) formant un angle obtus de  $120^\circ$ . Notons-les [AB] et [BC] comme sur la figure ci-dessous.



L'angle aigu  $\widehat{ABC}$  est alors égal à :  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Par conséquent, le troisième segment tracé par le programme (appelons-le [CD]) est tel que  $CD = AB$  et tel que l'angle aigu  $\widehat{BCD}$  est aussi égal à  $60^\circ$ .



Or par construction le triangle ABC est isocèle en B ( $AB = BC$ ), par conséquent  $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ . On en déduit que ce triangle est équilatéral.

Par ailleurs :  $\widehat{BCA} = 60^\circ = \widehat{BCD}$ .

Donc A et D sont alignés.

Puisque  $CD = BC$  et que  $BC = CA$ , alors  $CD = CA$ . On en déduit alors que  $D = A$ .

**Ainsi le programme B fait tracer un triangle équilatéral de 100 pixels de côté.**

**2) a) Calcul de la mesure de l'angle  $\widehat{FBC}$** 

Par hypothèse, ABCDE est un pentagone régulier. Par conséquent tous ses angles sont égaux (par exemple égaux à  $\widehat{CBA}$ ) et leur somme vaut :  $180^\circ \times 5 - 360^\circ = 900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$ .

On en déduit :  $5 \times \widehat{CBA} = 540^\circ$ .

Soit :  $\widehat{CBA} = 540^\circ \div 5 = 108^\circ$ .

D'autre part, le point F appartient à la droite (AB) qui n'appartient pas à la demi-droite [BA].

Alors :  $\widehat{FBA} = 180^\circ$ .

Or :  $\widehat{FBA} = \widehat{FBC} + \widehat{CBA}$ .

On en déduit l'égalité :  $180^\circ = 108^\circ + \widehat{FBC}$ .

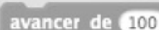
D'où :  $\widehat{FBC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ .

**2) b) Modifications à apporter au programme A pour obtenir un pentagone régulier**

Lorsque le stylo trace le segment [AB].

Pour que la figure tracée soit un pentagone régulier, il faut que :

- tous ses côtés soient de même longueur : il suffira donc de conserver dans le programme l'instruction :



- le stylo tourne de  $72^\circ$  dans le sens horaire (d'après la question précédente), ce qui correspond à l'instruction :



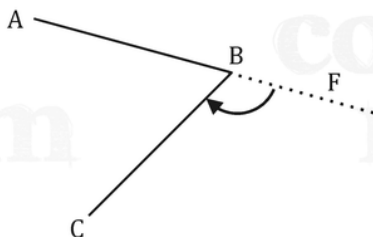
Pour que la figure tracée soit un pentagone, il est nécessaire de tracer 5 côtés : ainsi les deux instructions précédentes devront être répétées cinq fois, soit le bloc :



Le programme modifié sera alors le suivant :


**3) Identification du programme permettant de tracer un polygone régulier dont l'utilisateur choisit le nombre de côtés**

Dans tout ce qui suit,  $n$  désigne le nombre de côtés indiqués par l'utilisateur ( $n$  doit être un entier naturel supérieur ou égal à 3, nombre minimum de côtés pour que la ligne brisée forme un polygone). En reprenant les notations de la question 2, on notera [AB] et [BC] les deux premiers segments tracés par le programme, ainsi que F un point de la droite (AB) n'appartenant pas à demi-droite [BA] :



*Méthode 1 : identification des conditions à respecter pour que le programme convienne*

### Condition (1)

Pour que le programme convienne, il faut tout d'abord que le nombre de segments tracés soit le nombre  $n$  choisi par l'utilisateur. Cette valeur, stockée dans la variable `réponse`, doit donc apparaître dans la boucle « Répéter  fois ».

Par conséquent, pour que la condition (1) soit vérifiée, il faut que la boucle suivante apparaisse dans le programme :



Cette boucle apparaît dans les programmes 2, 3 et 4, mais pas dans le programme 1, ce qui élimine celui-ci.

### Condition (2)

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à  $n$  côtés, il est nécessaire que les  $n$  segments tracés soient de même longueur. Cette condition est vérifiée dans tous les programmes puisque l'instruction `avancer de 10` figure dans chacune des boucles.

### Remarque

Dans le programme 3, l'ordre des instructions dans la boucle est différent des autres programmes (on tourne le stylo puis on avance) mais cela ne change rien à la structure du programme.

### Condition (3)

La condition (3) fait référence à la propriété admise : « dans un polygone régulier à  $n$  côtés, l'angle  $\widehat{FBC}$  est égal à  $\frac{360^\circ}{n}$  ». La condition (3) correspond donc à l'égalité suivante :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$ .

L'instruction `tourner  de  degrés` désigne l'angle  $\widehat{FBC}$ .

Par conséquent, pour que la condition (3) soit vérifiée, il faut que l'instruction suivante apparaisse dans le programme :



Cette instruction apparaît uniquement dans le programme 2, ce qui élimine les programmes 1, 3 et 4 :

- dans les programmes 1 et 4, l'instruction `tourner  de 180 / réponse degrés` fait dépendre l'angle du nombre de côtés choisi, mais ne fait pas tourner le lutin du bon angle ;
- dans le programme 2, l'instruction `tourner  de 360 / 10 degrés` ne fait pas dépendre l'angle du nombre de côtés choisi.

**Le programme 1 ne convient pas parce qu'il ne respecte ni la condition (1), ni la condition (3).**

**Les programmes 3 et 4 ne conviennent pas parce qu'ils ne respectent pas la condition (3).**

**Le programme 2 respecte toutes les conditions. Par ailleurs, puisque l'un des programmes doit convenir, ce doit être le programme 2.**

*Méthode 2 : analyse de chacun des programmes*

### Analyse du programme 1

Dans le programme 1, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer :

- **dix segments** consécutifs quel que soit  $n$  le nombre de segments choisi par l'utilisateur;
- des segments formant un angle de  $\frac{180^\circ}{n}$  dans le sens horaire avec les segments précédemment tracés.

*Méthode 2.1 : mise en évidence d'une figure n'ayant pas  $n$  côtés*

Si l'utilisateur souhaite tracer un dodécagone en entrant la valeur « 12 », la boucle permettant de tracer les segments doit être répétée douze fois. Or le programme 1 fait toujours répéter la boucle dix fois.

**Ne faisant pas tracer le nombre de segments souhaités, le programme 1 ne convient pas.**

*Méthode 2.2 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété de l'angle  $\widehat{FBC}$* 

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », le programme fait calculer :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n} = 60^\circ$ .

Or :  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ .

L'angle  $\widehat{FBC}$  ne vérifie donc pas la propriété admise « dans un polygone régulier à  $n$  côtés,  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$  ».

**Par conséquent le programme 1 ne convient pas.**

*Méthode 2.3 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus*

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme fait calculer :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ .

Donc :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Or dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux à  $60^\circ$ . La figure tracée n'est par conséquent pas un triangle équilatéral.

**Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 1 ne convient pas.**

*Méthode 2.4 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété sur la somme des angles*

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », le programme fait calculer :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ .

Donc :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Or :  $3 \times \widehat{ABC} = 360^\circ$  et  $180^\circ \times 3 - 360^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$ , donc :  $3 \times \widehat{ABC} \neq 180^\circ \times 3 - 360^\circ$ .

La propriété des angles d'un polygone régulier proposée en début d'exercice n'est donc pas vérifiée dans le cas  $n = 3$ .

**Par conséquent le programme 1 ne convient pas.**

*Méthode 2.5 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de l'angle  $\widehat{FBC}$* 

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à  $n$  côtés, il est nécessaire que l'angle  $\widehat{FBC}$  soit égal à  $\frac{360^\circ}{n}$ .

Or dans le programme 1 :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$ .

**Ne vérifiant pas la propriété, le programme 1 ne convient pas.**

*Méthode 2.6 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de la somme des angles*

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à  $n$  côtés, il est nécessaire que les  $n$  angles soient égaux, par exemple à  $\widehat{ABC}$ . La propriété explicitée en début d'exercice correspond alors à l'égalité suivante :  $n \times \widehat{ABC} = 180^\circ \times n - 360^\circ$ .

Or dans le programme 1 :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$ .

Alors :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ .

Donc :  $n \times \widehat{ABC} = n \times \left(180^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = n \times 180^\circ - n \times \frac{180^\circ}{n} = n \times 180^\circ - 180^\circ \neq 180^\circ \times n - 360^\circ$ .

**Ne vérifiant pas la propriété des angles d'un polygone régulier, le programme 1 ne convient pas.**

**Analyse du programme 2**

Dans le programme 2, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer  $n$  segments consécutifs de même longueur, formant un angle de  $\frac{360^\circ}{n}$  avec les précédents.

On obtient alors :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$ .

Ainsi la propriété admise portant sur les angles  $\widehat{FBC}$  d'un polygone régulier est vérifiée.

**Par conséquent, le programme 2 est celui qui convient.**

### Analyse du programme 3

Dans le programme 3, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer  $n$  segments consécutifs de même longueur, formant toujours le même angle avec les précédents, égal à :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .

*Méthode 2.7 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété admise sur les angles  $\widehat{FBC}$*

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 »,  $\widehat{FBC}$  doit vérifier l'égalité suivante pour que le polygone obtenu soit régulier :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ .

Or le programme impose :  $\widehat{FBC} = 36^\circ$ .

**Ne conduisant pas aux angles souhaités, le programme 3 ne convient pas.**

*Méthode 2.8 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus*

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme impose :  $\widehat{FBC} = 36^\circ$ , donc :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ .

Or dans un triangle équilatéral  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

**Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.**

*Remarque :*

La méthode 2.8 pourrait également déboucher sur des contradictions concernant la somme des angles dans un triangle ( $3 \times 144^\circ > 180^\circ$ ), ou bien concernant la somme des angles dans un polygone régulier à trois côtés ( $3 \times 144^\circ = 432^\circ \neq 180^\circ \times 3 - 360^\circ$ ).

*Méthode 2.9 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue*

Si l'utilisateur souhaite tracer un dodécagone, il entre la valeur « 12 ». La boucle se répète 12 fois, mais au bout de 10 répétitions, les segments se chevauchent. Ainsi, pour une valeur  $n$  supérieure ou égale à 10, le programme conduit à un décagone régulier de côté 10 pixels ( $10 \times 144^\circ = 180^\circ \times 10 - 360^\circ$ ).

**Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.**

*Méthode 2.10 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue*

Si l'utilisateur souhaite tracer un carré, il entre la valeur « 4 ». La boucle se répète 4 fois, les angles étant tous de mesure  $36^\circ$ , en 4 répétitions, on obtient  $4 \times 36^\circ = 144^\circ \neq 360^\circ$  donc la ligne brisée ne se referme pas.

**Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.**

*Méthode 2.11 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de l'angle  $\widehat{FBC}$*

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à  $n$  côtés, il est nécessaire que l'angle  $\widehat{FBC}$  soit égal à  $\frac{360^\circ}{n}$ .

Or dans le programme 3 :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .

**Ne vérifiant pas la propriété, le programme 3 ne convient pas.**

*Méthode 2.12: démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de la somme des angles*

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à  $n$  côtés, il est nécessaire que les  $n$  angles soient égaux, par exemple à  $\widehat{ABC}$ . La propriété sur la somme des angles d'un polygone régulier correspond alors à l'égalité suivante :  $n \times \widehat{ABC} = 180^\circ \times n - 360^\circ$ .

Or dans le programme 3 :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .

Donc :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ .

Alors :  $n \times \widehat{ABC} = 144^\circ \times n$

Or l'égalité  $144^\circ \times n = 180^\circ \times n - 360^\circ$  est équivalente à :  $(180^\circ - 144^\circ) \times n = 360^\circ$

Ou encore à :  $n = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$ .

Par conséquent la propriété sur la somme des angles n'est vérifiée que dans le cas où  $n = 10$ .

**Par conséquent, le programme 3 ne convient pas dès que  $n \neq 10$ .**

#### Analyse du programme 4

Dans le programme 4, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer  $n$  segments consécutifs de même longueur, et formant un angle de  $\frac{180^\circ}{n}$  avec les précédents.

*Méthode 2.13 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue*

Si l'utilisateur entre la valeur « 6 »,  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ .

Or :  $6 \times 30^\circ = 180^\circ < 360^\circ$ .

On en déduit que le programme 4 conduit à **une ligne brisée non fermée**.

**Par conséquent, le programme 4 ne convient pas.**

*Méthode 2.14 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus*

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme fait calculer :  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ .

Donc :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Or dans un triangle équilatéral  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

**Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 4 ne convient pas.**

#### Remarque

La méthode 2.14 pourrait également déboucher sur des contradictions concernant la somme des angles dans un triangle ( $3 \times 120^\circ > 180^\circ$ ), ou bien concernant la somme des angles dans un polygone régulier à trois côtés ( $3 \times 120^\circ = 360^\circ \neq 180 \times 3 - 360^\circ$ ).

*Méthode 2.15 : démonstration dans le cas général*

Le programme 4 impose  $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$ .

Or nous avons admis (voir méthode 2.5) que pour un polygone régulier :  $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$ .

**Par conséquent, le programme 4 ne convient pas.**

*Remarque*

A partir du calcul de  $\widehat{FBC}$ , on pourrait également raisonner sur la somme des angles dans le polygone (voir méthode 2.6).

#### 4) Construction d'une figure ayant l'apparence d'un cercle

Un polygone régulier peut prendre l'apparence d'un cercle sur l'écran à condition qu'il possède un « grand nombre » de côtés. On peut donc utiliser le programme 2 précédent en choisissant  $n$  « suffisamment grand ». Par exemple, les figures (a), (b) et (c) suivantes présentent le polygone avec respectivement  $n = 10$ ,  $n = 20$  et  $n = 100$ .

