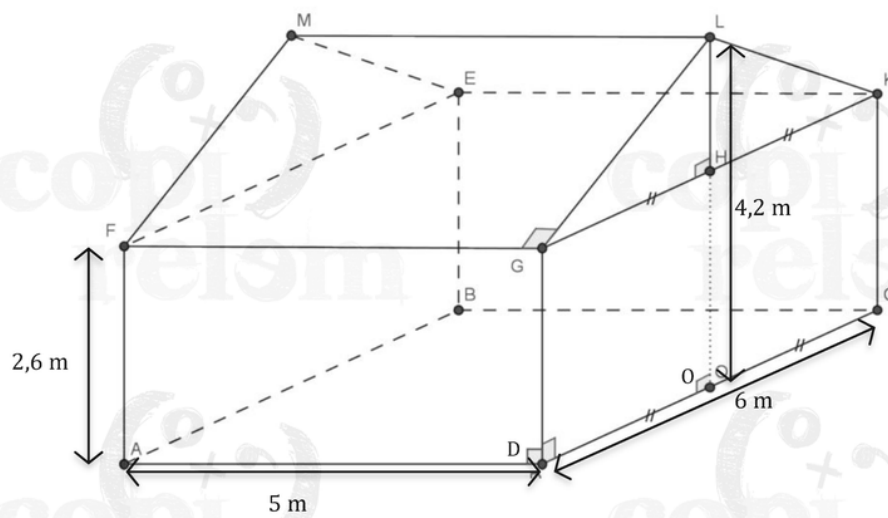


PREMIÈRE PARTIE : un abri de jardin

Remarque préalable

Les informations relatives au solide modélisant l'abri de jardin sont données, d'une part dans le texte, c'est le cas par exemple des différentes mesures, et d'autre part sous forme codée dans la figure, c'est le cas des milieux et de certains angles droits.

On admettra ainsi dans la suite que les points L , H et O sont alignés (résultat qui peut se déduire des informations codées sur la figure).



A - Le bâtiment

1) Calcul de la surface au sol de l'abri

Remarque

L'expression « la surface au sol » est issue du langage courant. Toutefois celle-ci peut désigner aussi bien la surface elle-même (ici le rectangle ABCD) que son aire. Mathématiquement, et les programmes l'exigent, il conviendrait de distinguer ces deux sens (distinguer ici l'objet et la grandeur) par des formulations adaptées. Le contexte nous invite ici à privilégier le second sens ; ce qui revient à interpréter la question comme « déterminer l'aire de la surface au sol du bâtiment ».

La surface au sol du bâtiment est l'aire du rectangle ABCD, dont la longueur DC et la largeur AD sont respectivement égales à 6 m et à 5 m.

D'où $\text{Aire}(\text{ABCD}) = \text{DC} \times \text{AD} = 6 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.

La surface au sol du bâtiment est de 30 m².

2) Volume du bâtiment

Le bâtiment peut se décomposer en deux solides :

- un pavé droit ABCDGKEF ;
- un prisme droit EFGKLM à base triangulaire GKL.

Le volume du bâtiment est la somme de leurs deux volumes.

Calcul du volume du pavé droit ABCDGKEF

On connaît la longueur DC, la largeur AD et la hauteur AF de ce pavé droit.

On a donc : $V(\text{ABCDGKEF}) = \text{DC} \times \text{AD} \times \text{AF} = 6 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 2,6 \text{ m} = 78 \text{ m}^3$

Calcul du volume du prisme droit EFGKLM

Rappelons que le volume d'un prisme se calcule à l'aide de la formule : $V = \text{Aire}(\text{base}) \times \text{hauteur}$.

Le triangle GKL est une base de ce prisme. La hauteur associée à cette base est GF, qui est égale à AD, donc à 5 m, car ADGF est un rectangle.

- Calculons l'aire du triangle GKL.

D'après les données codées de la figure (angle droit en H), on peut dire que (LH) est la hauteur relative à la base [GK] de ce triangle.

On a d'une part :

$$GK = DC = 6 \text{ m car CDGK est un rectangle.}$$

D'autre part :

$$LH = LO - HO \text{ car H est un point du segment [OL] (on admet que O, L et H sont alignés).}$$

Or H et O sont les milieux respectifs des segments [GK] et [DC], donc HO est une médiane du rectangle CDGK. Sa longueur est donc égale à celle des côtés [DG] et [CK], et donc égale à AF puisque ADGF est un rectangle.

$$\text{D'où } LH = LO - HO = 4,2 \text{ m} - 2,6 \text{ m} = 1,6 \text{ m.}$$

$$\text{On a alors } \text{Aire}(\text{GKL}) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{GK \times LH}{2} = \frac{6 \text{ m} \times 1,6 \text{ m}}{2} = \frac{9,6 \text{ m}^2}{2} = 4,8 \text{ m}^2.$$

- On peut alors calculer le volume du prisme droit EFGKLM

$$V(\text{EFGKLM}) = \text{Aire}(\text{GKL}) \times GF = 4,8 \text{ m}^2 \times 5 \text{ m} = 24 \text{ m}^3$$

Calcul du volume total du bâtiment

Finalement, on obtient

$$V(\text{bâtiment}) = V(\text{ABCDGKEF}) + V(\text{EFGKLM}) = 78 \text{ m}^3 + 24 \text{ m}^3 = 102 \text{ m}^3$$

Le volume du bâtiment est donc bien 102 m^3 .

B - Le toit**1) a) Longueur LG**

Dans le triangle LHG, rectangle en H, on connaît les longueurs des deux côtés de l'angle droit :

- $LH = 1,6 \text{ m}$ (voir question précédente)

- $GH = \frac{1}{2} \times GK = \frac{1}{2} \times 6 \text{ m} = 3 \text{ m}$, car H est le milieu de [GK].

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de l'hypoténuse [LG] :

$$LG^2 = GH^2 + LH^2 = (1,6 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2 = 2,56 \text{ m}^2 + 9 \text{ m}^2 = 11,56 \text{ m}^2$$

$$\text{D'où } LG = \sqrt{11,56 \text{ m}^2} = 3,4 \text{ m.}$$

La longueur LG est égale à $3,4 \text{ m}$.

1) b) Aire du toit

Le toit est constitué des deux rectangles GLMF et KEML.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont même longueur LM, égale à GF et à KE.

Et puisque ADGF est aussi un rectangle, GF est égale à AD et donc à 5 m.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont aussi la même largeur.

En effet, la droite (LH) est la médiatrice du segment [GK], puisqu'elle lui est perpendiculaire et passe en son milieu. En conséquence L est équidistant de G et K.

Ainsi, on a $LK = LG = 3,4 \text{ m}$.

- Ainsi, les deux rectangles GLMF et KEML sont superposables et donc ils ont la même aire.

$$\text{On en déduit } \text{Aire}(\text{toit}) = 2 \times \text{Aire}(\text{GLMF}) = 2 \times GF \times LG = 2 \times 5 \text{ m} \times 3,4 \text{ m} = 34 \text{ m}^2.$$

L'aire du toit est donc bien égale à 34 m^2 .

2) Pente du toit et type de tuiles

Dans le triangle GHL, rectangle en H, on connaît les mesures des longueurs des trois côtés.

Pour déterminer l'angle HGL, on peut donc, au choix, calculer son sinus, son cosinus ou sa tangente.

Par exemple, on a $\tan \widehat{HGL} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{LH}{GH} = \frac{1,6 \text{ m}}{3 \text{ m}}$ (ou encore $\tan \widehat{HGL} \approx 0,5333$)

d'où $\widehat{HGL} = \tan^{-1}\left(\frac{1,6}{3}\right)$

soit $\widehat{HGL} \approx 28^\circ$. (ou $\widehat{HGL} \approx \tan^{-1}(0,5333) \approx 28^\circ$)

L'angle $\widehat{HGL}$ est bien compris entre 25° et 60° . Il permet donc d'utiliser les tuiles « mécaniques ».

3) Estimation du nombre de tuiles « petit moule » nécessaires

Remarque

D'après l'énoncé, le magazine professionnel demande de commencer par déterminer « le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit », sans autre précision sur son mode de calcul. Deux interprétations sont alors envisageables selon que l'on simule un pavage du toit par les tuiles ou que l'on se limite à une comparaison entre les aires du toit et d'une tuile. Ces deux interprétations aboutissent à des estimations différentes mais, ici, à la même conclusion finale.

1ère interprétation du conseil du magazine : simulation d'un pavage effectif

Dans ce cas, afin de pouvoir comparer les deux estimations, il faut pour chacune d'elles calculer le nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit.

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles**.

- À partir des informations du magazine professionnel

Il s'agit ici dans un premier temps de couvrir la surface du toit en juxtaposant simplement des tuiles.

Pour couvrir le plan GLMF du toit :

- le long du côté FG, il faudra 22 colonnes de tuiles car $21 \times 23,5 \text{ cm} < 5 \text{ m} < 22 \times 23,5 \text{ cm}$;
- le long du côté LG, il faudra 11 rangées de tuiles car $10 \times 32 \text{ cm} < 3,4 \text{ m} < 11 \times 32 \text{ cm}$.

Il faudra donc $11 \times 22 = 242$ tuiles pour couvrir le pan GLMF, et le double, soit 484 tuiles pour couvrir l'ensemble du toit en les juxtaposant simplement.

Pour prendre en compte les découpes et les chevauchements, ce magazine préconise de prévoir un tiers de tuiles de plus, soit en tout $\frac{4}{3}$ des 484 tuiles. Il faudra alors prévoir $\frac{4}{3} \times 484 \approx 645,3$ soit **646 tuiles**.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

2^{de} interprétation du conseil du magazine : utilisation du rapport entre l'aire d'un toit et l'aire d'une tuile

Méthode 1 : calcul du nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles**.

- À partir des informations du magazine professionnel

Pour déterminer le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir le toit, on cherche le rapport entre l'aire du toit et l'aire d'une tuile.

- aire du toit : $34 \text{ m}^2 = 340\,000 \text{ cm}^2$.
- aire d'une tuile : $23,5 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} = 752 \text{ cm}^2$.
- nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit : $340\,000 \div 752 \approx 452,1$, soit 453 tuiles.

D'où l'estimation du nombre tuiles nécessaires pour couvrir le toit : $\frac{4}{3} \times 453 \text{ tuiles} = \textbf{604 tuiles}$.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

Méthode 2 : comparaison du nombre de tuiles nécessaires pour couvrir un mètre-carré

L'aire d'une tuile est : $23,5 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} = 752 \text{ cm}^2$.

Donc pour couvrir un m^2 , c'est-à-dire $10\,000 \text{ cm}^2$, il faudra : $10\,000 \text{ cm}^2 : 752 \text{ cm}^2 \approx 13,3$ tuiles.

On y ajoute un tiers pour les découpes et les chevauchements : $\frac{4}{3} \times 13,3 \text{ tuiles} \approx 17,7$ tuiles.

Selon le magazine, il faut donc moins de 18 tuiles au m^2 .

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

4) Coût de la couverture

Possibilité 1

L'aire du toit est de 34 m^2 et l'entreprise facture 60 € par m^2 .

Le coût total serait alors de : $34 \text{ m}^2 \times 60 \text{ €/m}^2 = 1920 \text{ €}$.

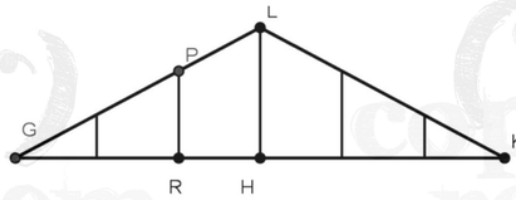
Possibilité 2

Le coût de l'achat de 700 tuiles est de : $700 \text{ tuiles} \times 1,35 \text{ €/tuile} = 945 \text{ €}$.

En y intégrant la pose, le coût total serait de $945 \text{ €} + 900 \text{ €} = 1845 \text{ €}$.

La seconde possibilité coûte le moins cher au propriétaire.

C - Les frontons



1) Longueur PR

Toutes les poutres étant verticales, elles sont parallèles entre elles.

Ainsi, dans la situation proposée :

- les points G, R et H sont alignés,
- les points G, P et L sont alignés,
- les droites (RP) et (HL) sont parallèles entre elles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, en s'appuyant par exemple sur les triangles semblables GRP et GHL, ce qui permet d'affirmer que :

$$\frac{GP}{GL} = \frac{GR}{GH} = \frac{PR}{LH}$$

L'égalité $\frac{PR}{LH} = \frac{GR}{GH}$ donne $\frac{PR}{LH} = \frac{2}{3}$, d'où $PR = \frac{2}{3} \times LH = \frac{2}{3} \times 1,6 \text{ m}$ soit $PR \approx 1,0666 \text{ m}$.

La valeur de PR, exprimée en mètre et arrondie au centimètre est donc de 1,07 m.

2) Longueur de bois pour décorer le fronton

Remarque

Attention, il s'agit ici de savoir si le propriétaire aura besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH. Il faut donc éviter, et même s'interdire, le recours à des valeurs approchées.

Le colombage est constitué de cinq poutres et il est symétrique par rapport à la poutre centrale de longueur LH. Si l'on nomme P' et R' les milieux respectifs de [GP] et de [GR], deux autres poutres sont de longueur P'R' et les deux dernières sont de longueur PR.

Le raisonnement mené lors de la question précédente a conduit à la relation : $PR = \frac{2}{3} \times LH$.

Un raisonnement analogue, utilisation du théorème de Thalès avec les triangles semblables $GP'R'$ et GHL , conduit à la relation $P'R' = \frac{1}{3} \times LH$.

Remarque

On peut aussi utiliser le théorème des milieux dans le triangle GRP qui permet d'obtenir :

$$P'R' = \frac{1}{2} \times PR = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times LH = \frac{1}{3} \times LH.$$

Méthode 1 : calcul explicite de la longueur totale

La longueur totale des cinq poutres est alors :

$$LH + 2 \times PR + 2 \times P'R' = LH + 2 \times \frac{2}{3} \times LH + 2 \times \frac{1}{3} \times LH = \frac{9}{3} \times LH = 3 LH.$$

Pour décorer un fronton, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH .

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

Méthode 2 : calcul par regroupement « réfléchi » des longueurs

On remarque que, pour fabriquer les poutres $[P'R']$ et $[PR]$, il faut une longueur LH .

$$\text{En effet : } \frac{1}{3} \times LH + \frac{2}{3} \times LH = \frac{3}{3} \times LH = LH.$$

Il en est de même pour les deux poutres qui leur sont symétriques par rapport à (LH) .

Et donc, pour décorer un fronton avec cinq poutres, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH .

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

D - Maquette

1) Échelle de la maquette

Rappel

L'échelle d'une représentation (plan, maquette, ...) est le rapport entre les mesures des longueurs sur la représentation et les mesures des longueurs correspondantes de l'objet réel, exprimées dans la même unité.

Quand il s'agit, comme ici, d'une réduction, on l'exprime sous la forme d'une fraction, si possible de la forme $\frac{1}{k}$, notée usuellement $1/k$ (ou $1 : k$). Les longueurs sur la représentation s'obtiennent alors en multipliant les

longueurs réelles par $\frac{1}{k}$ (donc en les divisant par k).

Méthode 1 : en raisonnant sur les longueurs

Les dimensions en réalité du rectangle $ABCD$ sont $AD = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$ et $DC = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$.

Si on note $1/k$ l'échelle de la maquette, alors les dimensions dans la maquette du rectangle $ABCD$ sont :

$$\frac{500}{k} \text{ cm et } \frac{600}{k} \text{ cm.}$$

L'aire, dans la maquette, de la surface au sol s'obtient donc en effectuant le produit de $\frac{500}{k} \text{ cm}$ et de $\frac{600}{k} \text{ cm}$.

Cette aire est égale à 480 cm^2 , donc le nombre k est solution de l'équation : $\frac{500}{k} \times \frac{600}{k} = 480$.

$$\text{On obtient : } \frac{300000}{k^2} = 480, \text{ d'où } 480 k^2 = 300000, \text{ d'où } k^2 = \frac{300000}{480} = 625 \text{ et } k = \sqrt{625} = 25.$$

La maquette est donc à l'échelle $1/25$. (On dit aussi « au $25^{\text{ème}}$ ».)

Méthode 2 : en raisonnant directement sur les aires

On sait que, entre le réel et sa représentation, lorsque le rapport entre les longueurs est k , alors le rapport entre les aires est k^2 et le rapport entre les volumes est k^3 .

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :

- en réalité de $30 \text{ m}^2 = 300000 \text{ cm}^2$
- sur la maquette de 480 cm^2 .

Le rapport entre ces deux aires est donc $k^2 = \frac{300000}{480} = 625$.

Le rapport entre les longueurs est donc $k = \sqrt{625} = 25$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

Méthode 3 : en raisonnant sur les aires avec une homothétie

Passer du réel à sa représentation correspond à l'utilisation d'une homothétie.

Dans le cas d'une réduction à l'échelle $1/k$, cette homothétie est de rapport $\frac{1}{k}$.

On sait que dans ce cas, toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{k}$, donc les aires sont multipliées par $\left(\frac{1}{k}\right)^2$ et les volumes sont multipliés par $\left(\frac{1}{k}\right)^3$.

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :

- en réalité de $30 \text{ m}^2 = 300000 \text{ cm}^2$;
- sur la maquette de 480 cm^2 .

On a donc : $300\,000 \times \left(\frac{1}{k}\right)^2 = 480$ d'où $\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{480}{300000} = \frac{1}{625}$.

On en déduit $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

2) Volume, en cm^3 , de la maquette

Remarque

Le calcul du volume de la maquette est en lien avec le calcul du volume réel du bâtiment.

On pourrait envisager de reprendre pas à pas la méthode utilisée pour la question A2 après avoir déterminé (grâce à l'échelle) toutes les longueurs utiles de la maquette. Cependant, le fait que le volume du bâtiment soit donné dans l'énoncé (question A2) doit inciter à utiliser ce résultat. L'utilisation directe du rapport entre les volumes (voir propriétés rappelées dans la question précédente, méthodes 2 et 3) est alors très efficace.

Puisque l'échelle de la maquette est de $1/25$, les longueurs sur la maquette s'obtiennent en multipliant les longueurs réelles par $\frac{1}{25}$ donc le volume de la maquette s'obtient en multipliant le volume réel de l'abri de jardin par $\left(\frac{1}{25}\right)^3$, c'est-à-dire en le divisant par $25^3 = 15625$.

Le volume réel de l'abri de jardin est de $102 \text{ m}^3 = 102\,000\,000 \text{ cm}^3$

Le volume de la maquette est donc de $102\,000\,000 \text{ cm}^3 \div 15625 = 6528 \text{ cm}^3$.

Le volume de la maquette est de 6528 cm^3 .

Remarque

Dans cet exercice, seules les réponses étaient attendues. Ici, nous les avons toutes justifiées.

Dans la mesure où plusieurs réponses sont à chaque fois proposées, une seule étant correcte, plusieurs stratégies peuvent être, a priori, envisageables.

On peut, selon le cas :

- résoudre le problème tel qu'il est posé (puis contrôler que la solution obtenue est proposée) ;
- éliminer les solutions proposées incompatibles avec les données et tester les plus probables ;
- tester chacune des solutions proposées jusqu'à en trouver une qui « fonctionne ».

1) Une question de moyenne

La réponse correcte est E.

Si le prix moyen des cinq perroquets était initialement de 5000 €, c'est que le prix total de ces cinq perroquets était de $5 \times 5000 \text{ €} = 25\,000 \text{ €}$.

Puisque le prix moyen des quatre perroquets restants est de 4000 €, c'est qu'à eux quatre, ils coûtent $4 \times 4000 \text{ €} = 16\,000 \text{ €}$.

La valeur du plus cher de ces perroquets est donc la différence entre 25 000 € et 16 000 €, soit 9000 €.

Donc le perroquet qui s'est envolé coûtait 9000 €.

Remarque

Prendre ici le problème « à l'envers » en testant chacune des réponses proposées peut permettre d'éliminer les solutions extrêmes 2000 € (inférieur à la moyenne) et 100 000 € (beaucoup trop grand pour une seule valeur sur 5) mais, pour faire un choix certain parmi les valeurs restantes, il paraît indispensable de faire le lien entre valeur moyenne et valeur totale. Ce qui revient au raisonnement précédent...

2) Décomposition d'un pavé de 42 cubes

La réponse correcte est C.

Comme chaque cube a pour arête 1cm, les mesures en cm des trois dimensions du pavé sont des nombres entiers. Notons L , l , et h ces trois nombres, mesures respectives des longueur et largeur de la face posée au sol et de la hauteur du pavé.

Il s'agit alors de déterminer ces trois nombres entiers sachant qu'ils vérifient deux contraintes :

- le produit $L \times l \times h$ doit être égal à 42, car le volume du pavé est de 42 cm^3 . Cette contrainte a aussi pour conséquence que L , l et h doivent être des diviseurs de 42.
- La somme $L + l$ doit être égale à 9, car le demi-périmètre de la face posée au sol doit être de 9 cm, moitié de 18 cm.

Une stratégie, pour résoudre cet exercice, consiste à chercher toutes les possibilités satisfaisant l'une des contraintes, puis de regarder, pour chacune d'elles, si elle vérifie aussi la seconde contrainte (*méthodes 1 et 2*). Une autre stratégie consiste ici (QCM) à considérer chacune des valeurs de h proposées et regarder si on peut alors trouver l et L satisfaisant aux deux contraintes précédentes (*méthode 3*).

Méthode 1 : recherche des décompositions multiplicatives de 42 en produit de trois facteurs entiers

La décomposition de 42 en produit de facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.

42 possède 8 diviseurs qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 et 42.

Les décompositions de 42 en produit de trois facteurs sont alors les suivantes :

- $42 = 1 \times 1 \times 42$
- $42 = 1 \times 2 \times 21$
- $42 = 1 \times 3 \times 14$
- $42 = 1 \times 6 \times 7$
- $42 = 2 \times 3 \times 7$

Il s'agit ici dans un second temps de chercher parmi ces cinq décompositions, celle(s) dont deux des facteurs ont pour somme 9.

C'est le cas uniquement pour la dernière de ces cinq décompositions : 7 et 2 ont pour somme 9.

Ces deux nombres correspondent donc aux mesures en centimètres des longueur et largeur de la face posée au sol.

Le troisième facteur, qui est un 3, correspond à la mesure de la hauteur. Celle-ci est donc égale à 3 cm.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 2 : recherche des décompositions additives de 9

Les seules décompositions possibles de 9 comme somme de deux entiers non nuls sont les suivantes :

$$9 = 1 + 8 \quad 9 = 2 + 7 \quad 9 = 3 + 6 \quad 9 = 4 + 5$$

Dans un second temps, il faut retenir parmi ces quatre décompositions additives uniquement celle(s) dont les deux termes sont des diviseurs de 42.

C'est uniquement le cas de la décomposition $9 = 2 + 7$ car 8, 6, 4 et 5 ne sont pas des diviseurs de 42.

On en conclut donc que 7 et 2 sont les valeurs de L et l .

La mesure h de la hauteur, exprimée en centimètre, vérifie donc $7 \times 2 \times h = 42$.

Ce qui donne $h = 3$.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 3 : recherche à partir des valeurs de h proposées

Si $h = 1$ alors on cherche deux entiers L et l tels que $L \times l = 42$ et $L + l = 9$.

Les seules décompositions de 42 en produit de deux facteurs sont :

$$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7.$$

Aucune ne fournit un couple de somme 9. Il n'existe donc pas de solution.

Si $h = 2$ alors on doit avoir $L \times l = 21$ et $L + l = 9$.

Les seules décompositions de 21 en produit de deux facteurs sont : $21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$.

Là encore, aucune solution satisfaisante.

Si $h = 3$ alors on doit avoir $L \times l = 14$ et $L + l = 9$.

On a $14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$ or $2 + 7 = 9$ donc $L = 7$ et $l = 2$ est la solution cherchée.

Il est inutile de tester les autres valeurs de h , d'une part car il est admis que le problème n'admet qu'une solution et, d'autre part, car 4 et 5 ne sont pas diviseurs de 42.

La hauteur du pavé est donc de 3 cm.

3) Vitesse moyenne

La réponse correcte est B.

Méthode 1 : méthode algébrique avec résolution d'une équation

Comme les vitesses sont exprimées en mètres par seconde, on privilégiera ici comme unités, d'une part les secondes pour les durées, d'autre part les mètres pour les distances.

Notons d la valeur cherchée, exprimée en mètres, de la largeur de la forêt.

À l'aller, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $t_A = \frac{d_A}{v_A} = \frac{d}{5}$.

Au retour, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $t_R = \frac{d_R}{v_R} = \frac{d}{4}$.

La durée totale de ces deux traversées effectuées par Raphaël étant de 15 minutes, soit 900 secondes, d est solution de l'équation :

$$\frac{d}{5} + \frac{d}{4} = 900.$$

Cette équation se transforme successivement en :

$$\frac{4d}{20} + \frac{5d}{20} = 900 \quad \text{d'où} \quad \frac{9d}{20} = 900 \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{20} = 100 \quad \text{d'où} \quad d = 2000 \text{ m.}$$

La largeur de la forêt traversée est de 2000 m, soit 2 km.

Méthode 2 : en testant successivement par le calcul chacune des valeurs proposées

- Testons la proposition A.

Si la largeur de la forêt est de 1,8 km, c'est-à-dire de 1800 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{1800 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 360 \text{ s}$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{1800 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 450 \text{ s}$

La durée totale des deux traversées sera alors de 810 s., un temps inférieur à 15 minutes (c'est-à-dire à 900 secondes). On peut en conclure que la largeur de la forêt est à coup sûr supérieure à 1,8 km.

- Testons la proposition B.

Si la largeur de la forêt est de 2 km, c'est-à-dire de 2000 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{2000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 400 \text{ s}$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{2000 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 500 \text{ s}$.

La durée totale des deux traversées sera alors de 900 s, soit exactement la durée annoncée de 15 minutes.

La largeur de la forêt traversée est donc de 2 km.

Il n'y a évidemment plus besoin de tester les propositions C, D et E d'une part parce que dans ces trois propositions, la distance étant supérieure à 2 km, le temps de traversée aller-retour sera à chaque fois supérieur à 15 minutes et, d'autre part, parce que ce problème admet une unique solution.

1) Nombre de pots de confiture

Pour faire sa confiture, Grand-père doit ajouter une quantité de sucre égale à $\frac{4}{5}$ des 5 kg de mirabelles dénoyautées, c'est-à-dire ajouter 4 kg de sucre aux 5 kg de fruits. Il obtient donc 9 kg de mélange.

La cuisson fait perdre 25 % de la masse de ce mélange fruit-sucre.

Enlever 25 % à une quantité revient à la multiplier par $(1 - \frac{25}{100}) = 0,75$.

La quantité de confiture obtenue après cuisson est donc de : $0,75 \times 9 \text{ kg} = 6,750 \text{ kg}$.

Pour remplir entièrement chacun des pots utilisés, il faut un demi-kilo de confiture donc avec un kilo de confiture, on remplit 2 pots. Grand-père pourra donc remplir 13 pots de confiture.

Remarque

On peut aussi diviser les 6750 g de confiture par 500 g, la contenance d'un pot. Le nombre de pots entièrement remplis est alors la partie entière du quotient, c'est-à-dire la partie entière de 13,5.

2) Proportionnalité entre la masse de confiture et la masse des fruits dénoyautés

On pouvait présenter le raisonnement de plusieurs façons.

Méthode 1 : en raisonnant sur les différentes grandeurs et leurs rapports

La masse du sucre ajouté est proportionnelle à la masse des mirabelles dénoyautées puisque leur rapport est constant toujours égal à $\frac{4}{5}$.

De même la masse du mélange fruit-sucre obtenu est proportionnelle à la masse des mirabelles dénoyautées puisque leur rapport est constant égal à $1 + \frac{4}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{9}{5}$ ou 1,8.

Pour finir, la masse de mélange perdue lors de la cuisson et la masse de confiture obtenue après cuisson sont aussi proportionnelles à la masse des mirabelles dénoyautées : le rapport entre ces deux dernières est toujours égal à $0,75 \times 1,8 = 1,35$.

La masse de confiture obtenue est bien proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées.

Méthode 2 : en exprimant chacune des grandeurs sous forme algébrique et en utilisant une fonction linéaire

Notons x la masse initiale de mirabelles dénoyautées et $f(x)$ la masse de confiture obtenue après cuisson.

La masse du sucre ajouté est donc égale à $\frac{4}{5}x$.

La masse de mélange fruit-sucre obtenu est alors égale à $\frac{4}{5}x + x = \frac{9}{5}x = 1,8x$.

La masse de confiture obtenue après cuisson est donc égale à $0,75 \times 1,8x = 1,35x$.

La fonction qui exprime la masse de confiture obtenue après cuisson en fonction de la masse de mirabelles dénoyautées est donc : $f(x) = 1,35 x$.

Cette fonction est de la forme $f(x) = a x$. Il s'agit donc d'une fonction linéaire et la situation modélisée par cette fonction est bien une situation de proportionnalité.

La masse de confiture obtenue est bien proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées.

3) Masse minimum de fruits dénoyautés pour obtenir 18 pots

Pour remplir 18 pots, il faut disposer de 18 fois 500 g de confiture, soit 9 kg de confiture.

Méthode 1

Le premier raisonnement mené à la question précédente sur les rapports entre grandeurs permet d'écrire l'égalité :

$$\frac{\text{masse de confiture}}{\text{masse de fruits dénoyautés}} = 1,35.$$

D'où $\frac{9 \text{ kg}}{m} = 1,35$ puis $1,35 \times m = 9 \text{ kg}$ et donc $m = \frac{9 \text{ kg}}{1,35} \approx 6,667 \text{ kg}$.

La masse m minimum, arrondie à l'hectogramme près, de mirabelles dénoyautées nécessaires pour remplir 18 pots de confiture est donc 6,7 kg.

Méthode 2

La fonction obtenue à la question précédente est l'expression de la masse de confiture en fonction de la masse de fruits dénoyautés : $f(x) = 1,35 x$.

La masse m nécessaire de mirabelles dénoyautées pour obtenir 9 kg de confiture vérifie donc l'égalité suivante :

$f(m) = 9 \text{ kg}$ d'où $1,35 \times m = 9 \text{ kg}$ et donc $m = \frac{9 \text{ kg}}{1,35} \approx 6,667 \text{ kg}$.

La masse m minimum, arrondie à l'hectogramme près, de mirabelles dénoyautées nécessaires pour remplir 18 pots de confiture est donc 6,7 kg.

1) La liste « résultats » lorsque $n = 4$

Si l'on suit pas à pas l'exécution du programme, on obtient :

- Initialisation du programme

La liste « résultats » est vidée.

Si l'utilisateur choisit le nombre 4, on aura $n = 4$ et, pour commencer, $i = 1$

Le programme de la boucle qui suit doit être réalisé 4 fois.

- Boucle 1 :

Puisque « 4 modulo 1 » renvoie 0, alors 1 est mis dans la liste « résultats ».

Puis la variable i augmente de 1 donc i prend la valeur 2.

- Boucle 2 :

« 4 modulo 2 » renvoie 0, donc 2 est ajouté à la liste « résultats » puis i prend la valeur 3.

- Boucle 3 :

« 4 modulo 3 » renvoie 1, donc 3 n'est pas ajouté à la liste « résultats » et i prend la valeur 4.

- Boucle 4:

« 4 modulo 4 » renvoie 0, donc 4 est ajouté à la liste « résultats » puis i prend la valeur 5.

- Fin du programme

La liste « résultats » s'affiche : (1 ; 2 ; 4).

Si l'utilisateur choisit le nombre 4, la liste « résultats » sera (1 ; 2 ; 4).

Remarque

Pour bien comprendre l'évolution de l'état des variables et de la liste, on peut détailler davantage l'exécution du programme (voir tableau suivant), en numérotant de 1 à 9 chacune des lignes de ce script (la ligne 7.3, par exemple, correspondant dans la boucle à la 3^{ème} exécution de la ligne 7).

		Valeur de n	Valeur de i	Réponse à l'instruction conditionnelle « si $n \text{ modulo } i = 0$ »	Contenu de la liste résultats
Avant la boucle	ligne 2	-	-	-	vidée
	ligne 3	-	-	-	$\emptyset$
	ligne 4	4	-	-	$\emptyset$
	ligne 5	4	1	-	$\emptyset$
1 ^{ère} exécution de la boucle	ligne 7.1	4	1	OUI	$\emptyset$
	ligne 8.1	4	1	-	(1)
	ligne 9.1	4	2	-	(1)
2 ^{ème} exécution de la boucle	ligne 7.2	4	2	OUI	(1)
	ligne 8.2	4	2	-	(1 ; 2)
	ligne 9.2	4	3	-	(1 ; 2)
3 ^{ème} exécution de la boucle	ligne 7.3	4	3	NON	(1 ; 2)
	ligne 8.3	4	3	-	(1 ; 2)
	ligne 9.3	4	4	-	(1 ; 2)
4 ^{ème} exécution de la boucle	ligne 7.4	4	4	OUI	(1 ; 2)
	ligne 8.4	4	4	-	(1 ; 2 ; 4)
	ligne 9.4	4	4	-	(1 ; 2 ; 4)

2) a) Contenu de la liste une fois le programme exécuté

Ce script définit une liste nommée « résultats » qui est vidée de son contenu en début d'exécution du programme (ligne 2).

Ce script définit en lignes 4 et 5 deux variables :

- la variable n est le nombre choisi par l'utilisateur. Cette variable reste constante tout au long de l'exécution du script ;
- la variable i prend pour valeur initiale 1 et est ensuite incrémentée de 1 à chacune des n itérations de la boucle. La variable i prend donc successivement toutes les valeurs entières de 1 à n .

Ce script comporte une boucle répétée n fois.

La condition « si $n \text{ modulo } i = 0$ » de la ligne 7 peut se reformuler en « si i divise n ».

Ainsi en ligne 8, un nombre i vient s'ajouter à la liste « résultats » uniquement s'il est un diviseur de n .

Comme i prend successivement toutes les valeurs de 1 à n , à la fin de l'exécution du programme la liste « résultats » est constituée de tous les diviseurs du nombre n choisi, diviseurs qui sont listés dans l'ordre croissant.

Ainsi, la liste « résultats » est constituée de tous les diviseurs de n présentés dans l'ordre croissant.

Remarque

Le nombre entier n choisi ne doit pas être nul pour que l'instruction « répéter n fois » puisse être exécutée. Sinon, si l'on choisit le nombre 0, la liste « résultats » restera vide.

2) b) Nombre choisi si la liste « résultats » ne contient qu'un seul nombre

La question posée revient à déterminer les nombres entiers ne possédant qu'un seul diviseur.

On sait que tout nombre entier naturel non nul autre que 1 admet au moins deux diviseurs, 1 et lui-même.

1 est le seul nombre entier naturel non nul à ne posséder qu'un seul diviseur, lui-même.

Ainsi, si la liste « résultats » ne contient qu'un seul nombre une fois le programme exécuté, c'est que le nombre choisi était 1.

2) c) Nombres choisis si la liste « résultats » contient exactement deux nombres

La question posée revient à déterminer les nombres entiers possédant exactement deux diviseurs.

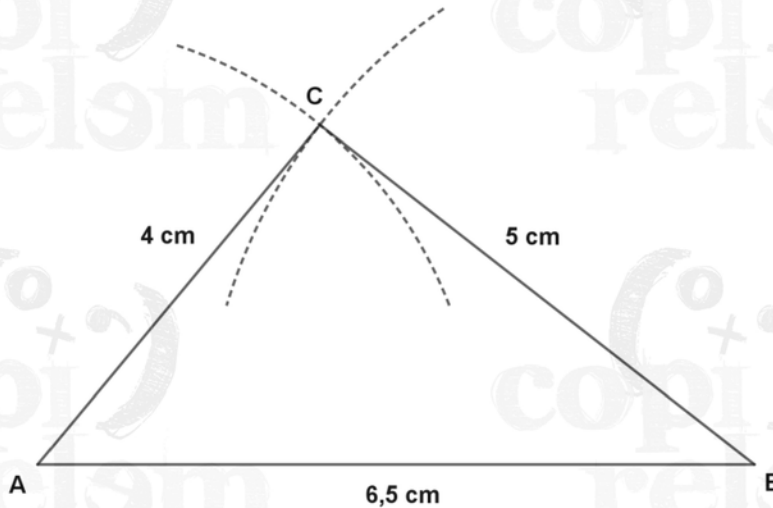
On sait que tout entier naturel non nul autre que 1 possède au moins deux diviseurs (1 et lui-même) et que les nombres qui ont exactement deux diviseurs sont, par définition, les nombres premiers.

Donc si la liste « *résultat* » contient exactement deux nombres, c'est que le nombre choisi est un nombre premier.

1) Construction d'un triangle

Le segment de longueur 6,5 cm déjà tracé détermine deux des sommets du triangle, notons les A et B.

Le troisième sommet C appartient à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 4 cm et du cercle de centre B et de rayon 5 cm.



2) Condition pour que le triangle soit constructible

Cette question mobilise une propriété que vérifient tous les triangles : l'inégalité triangulaire.

Rappel : les longueurs des côtés d'un triangle ABC doivent vérifier l'inégalité $AB \leq AC + CB$.

L'inégalité triangulaire permet de formuler des conditions de constructibilité d'un triangle dont on connaît les longueurs des côtés.

Ainsi, on a la propriété suivante : « Un triangle est constructible si et seulement si la longueur de chaque côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. »

Ou encore : « Un triangle est constructible si et seulement si la longueur du côté le plus long est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. »

Comme les deux longueurs obtenues avec les dés, notons les a et b , sont toutes deux inférieures à 6 cm, le segment AB déjà tracé sera assurément le plus long des trois côtés du triangle (s'il est constructible).

Ainsi, le triangle sera constructible si et seulement si les deux longueurs a et b obtenues avec les dés vérifient l'inégalité $6,5 \leq a + b$, condition qui s'écrit aussi $a + b \geq 6,5$.

Remarque

Cette condition revient à dire que les deux cercles, de centre A et de rayon a , et de centre B et de rayon b , se coupent.

3) Probabilité d'obtenir un triangle constructible

L'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés de couleurs différentes (par exemple un rouge et un vert) numérotés de 1 à 6 conduit à 36 (6×6) issues élémentaires équiprobables possibles que l'on peut présenter dans un tableau à double entrée.

Dans cette expérience aléatoire, on s'intéresse à la somme des deux résultats obtenus, sommes que l'on peut aussi indiquer dans le tableau.

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les issues favorables correspondent aux cas où cette somme est supérieure ou égale à 6,5.

Elles sont représentées par les cases grisées du tableau : il y a donc 21 issues favorables parmi les 36 résultats possibles.

La probabilité d'obtenir un triangle constructible est donc $\frac{21}{36}$ (ou $\frac{7}{12}$).

4) Probabilité d'obtenir un triangle isocèle sachant qu'il est constructible

Dans cette question les seules issues envisagées sont celles où le triangle est constructible. Il n'y a donc plus que 21 issues élémentaires équiprobables possibles.

Parmi elles, les issues favorables sont celles où le triangle est isocèle, c'est-à-dire possède deux côtés de même longueur. Comme les longueurs obtenues avec les dés sont des nombres entiers de centimètres, elles ne peuvent être égales à la longueur 6,5 cm du segment tracé.

Ainsi le triangle est isocèle à la seule condition que les résultats des deux dés soient égaux.

Ces issues favorables correspondent aux cases (4 ; 4), (5 ; 5) ; (6 ; 6) situées sur la première diagonale du tableau à double entrée ci-dessous, cases cochées dans le tableau ci-dessous.

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4				X		
5					X	
6						X

Il y a donc 21 issues possibles équiprobables pour que le triangle soit constructible, et, parmi elles, seules 3 issues sont favorables.

La probabilité pour que le triangle soit isocèle sachant qu'il est constructible est donc $\frac{3}{21}$ (ou $\frac{1}{7}$).