

A - Une construction

Le problème proposé consiste à trouver comment construire une surface de forme carrée ayant la même aire que la surface rectangulaire initiale.

1) Étude sur un cas particulier

On se place dans le cas où la mesure de la longueur AB du rectangle initial est 308 m et celle de la largeur 132 m. Réalisation d'un plan à l'échelle avec AB = 7,7 cm.

a) Calcul de la longueur AD sur le plan

Le plan à l'échelle est une réduction avec les dimensions du plan proportionnelles aux dimensions du terrain.

Procédure 1 : passage à l'unité

7,7 cm sur le plan correspondent à 308 m sur le terrain,

donc 1 cm sur le plan correspond à $\frac{308}{7,7}$ m sur le terrain, soit 40 m.

La largeur du terrain est 132 m qui correspondent sur le plan à $AD = \frac{132}{40}$ cm soit $AD = 3,3$ cm.

Remarque 1

On peut aussi chercher la valeur sur le plan correspondant à 1 m dans la réalité :

1 m sur le terrain est représenté par $\frac{7,7}{308}$ cm = $\frac{1}{40}$ cm = 0,025 cm.

Donc 132 m dans la réalité sera représenté par $AD = 132 \times 0,025$ cm = 3,3 cm.

Remarque 2

Cette procédure s'apparente à celle désignée par « règle de trois » :

308 m dans la réalité correspond à 7,7 cm sur le plan ;

donc 1 m dans la réalité correspond à 308 fois moins soit à $\frac{7,7}{308}$ cm sur le plan

et 132 m dans la réalité correspond à 132 fois plus soit à $132 \times \frac{7,7}{308}$ cm = 3,3 cm.

Procédure 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

Distances dans la réalité	308 m	132 m
Distances sur le plan	7,7 cm	AD

$\times \frac{7,7}{308}$

On obtient la mesure de AD en cm sur le plan en multipliant 132 (mesure en m sur le terrain) par $\frac{7,7}{308}$.

On a donc : $AD = 132 \times \frac{7,7}{308}$ cm = $132 \times \frac{1}{40}$ cm = $132 \times 0,025$ cm = 3,3 cm.

Procédure 3 : utilisation de l'égalité des rapports de longueurs

$$\frac{AD}{7,7 \text{ cm}} = \frac{132 \text{ m}}{308 \text{ m}} \quad \text{soit } AD = 7,7 \text{ cm} \times \frac{3}{7} = 3,3 \text{ cm}$$

Procédure 4 : utilisation de l'égalité des « produits en croix » (conséquence de l'égalité des rapports)

$$AD \times 308 \text{ m} = 132 \text{ m} \times 7,7 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } AD = \frac{132 \text{ m} \times 7,7 \text{ cm}}{308 \text{ m}} = 3,3 \text{ cm.}$$

308 m	132 m
7,7 cm	AD

Procédure 5 : utilisation des propriétés de la linéarité

Il s'agit de trouver des relations entre 308 et 132. Les nombres en présence ne se prêtent pas vraiment à l'utilisation de cette procédure, mais on peut remarquer que :

$$308 = 2 \times 132 + 44 = 2 \times 132 + \frac{132}{3} = \frac{7}{3} \times 132$$

et par conséquent :

$$7,7 \text{ cm} = \frac{7}{3} \times AD \quad \text{d'où } AD = \frac{3}{7} \times 7,7 \text{ cm} = 3,3 \text{ cm}.$$

b) Échelle de ce plan

Dans la phrase usuelle : « le plan du terrain est à l'échelle... », le nombre attendu est une fraction de numérateur 1 et correspond au coefficient (sans unité) qui exprime la relation entre les dimensions sur le terrain et les dimensions sur le plan :

Ici, en exprimant les mesures dans la même unité, $\frac{30800}{7,7} = 4\,000$ (ou $\frac{308}{0,077} = 4\,000$).

Ici, 1 cm sur le plan représente 4 000 cm sur le terrain (ou 1 m sur le plan représente 4 000 m sur le terrain, ou 1 mm sur le plan représente 4 000 mm sur le terrain, etc.).

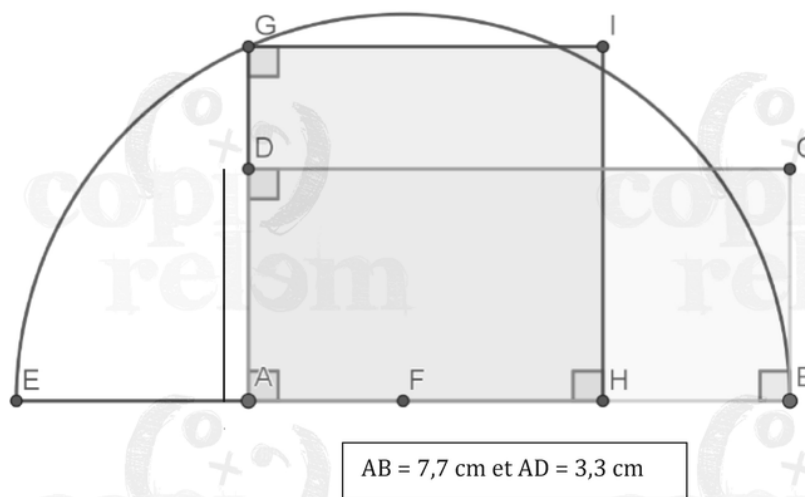
L'échelle est 1/4 000.

c) Construction de la figure à l'échelle et réalisation du protocole de construction

Les instruments à utiliser n'étant pas précisés ici, on suppose donc que tous les instruments (règle, équerre et compas) sont autorisés

Protocole de construction :

- tracer un rectangle ABCD, avec AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm ;
- construire un point E sur la demi-droite [BA) tel que AE = AD avec E n'appartenant pas au segment [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à la demi-droite [AB).

**d) Calcul des longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan**

D'après la construction :

les points E, A, F et B sont alignés et AE = AD et FE = FB = FG et AH = HI = IG = GA ;
AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm

A est un point du segment [EB]

donc **EB** = EA + AB = DA + AB soit EB = 3,3 cm + 7,7 cm = **11 cm**.

F est le milieu de [EB] d'où **EF** = 11 cm : 2 = **5,5 cm**.

F est un point du segment [AB] donc **AF** = AB - BF = AB - EF = 7,7 cm - 5,5 cm = **2,2 cm**.

FG est un rayon du demi-cercle de diamètre [EB] donc **FG** = FE = **5,5 cm**.

e) Aire du carré AGIH sur le plan

Seules les longueurs des segments [AF] et [FG] sont connues. $AF = 2,2$ cm et $FG = 5,5$ cm.

L'aire du carré AGIH est AG^2 .

Pour trouver AG^2 , dans le triangle AFG rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

$$FG^2 = FA^2 + AG^2 \quad \text{donc on a} \quad AG^2 = FG^2 - FA^2 = (5,5 \text{ cm})^2 - (2,2 \text{ cm})^2 = 25,41 \text{ cm}^2$$

L'aire du carré sur le plan est donc 25,41 cm².

f) Aire du carré dans la réalité

Pour obtenir les mesures des longueurs des côtés du carré en cm dans la réalité, on multiplie les mesures des longueurs des côtés du carré en cm sur le plan par le coefficient 4 000 (inverse de l'échelle).

Pour obtenir la mesure de l'aire du carré en cm² dans la réalité, on multiplie la mesure de l'aire du carré en cm² sur le plan par le coefficient 4 000² (carré du coefficient).

$$\text{L'aire du carré dans la réalité est } 25,41 \text{ cm}^2 \times 4\,000^2 = 406\,560\,000 \text{ cm}^2 = 40\,656 \text{ m}^2.$$

Comparaison avec l'aire du rectangle initial

La mesure de l'aire du rectangle initial, en m², est $132 \times 308 = 40\,656$.

Les deux aires sont égales.

Remarque

On peut comparer l'aire du rectangle et l'aire du carré sur le plan :

L'aire du carré sur le plan est 25,41 cm².

L'aire du rectangle sur le plan est $7,7 \text{ cm} \times 3,3 \text{ cm} = 25,41 \text{ cm}^2$.

2) Cas général : $AB = a$ et $AD = b$ (avec $a > b$)

Nous nous intéressons ici à la représentation sur le plan. Les nombres a et b expriment des mesures de longueur dans la même unité.

L'aire du rectangle ABCD est égale à $AB \times AD$, c'est à dire $a \times b$. D'autre part, l'aire du carré AHIG est égale à AG^2

En reprenant le raisonnement précédent (1) d)) fait sur un cas particulier, on exprime les différentes mesures en fonction de a et b :

Par construction :

$$EB = a + b ; EF = \frac{a+b}{2} ; AF = AB - EF = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} ; FG = EF = \frac{a+b}{2}.$$

Le triangle AFG est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$FG^2 = FA^2 + AG^2 \quad \text{d'où} \quad AG^2 = FG^2 - FA^2;$$

$$\text{soit } AG^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)] = a \times b.$$

On en déduit que l'aire du carré AHIG est bien égale à l'aire du rectangle ABCD.

B - Aménagement d'une fontaine**Lecture d'une représentation graphique représentant la trajectoire de la goutte d'eau dans un plan vertical**

Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x ; y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x , exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y , exprimée en mètre, par rapport au sol. Les graduations des axes expriment des mesures de longueur en mètre.

1) a) Hauteur de la goutte d'eau à la sortie de la colonne

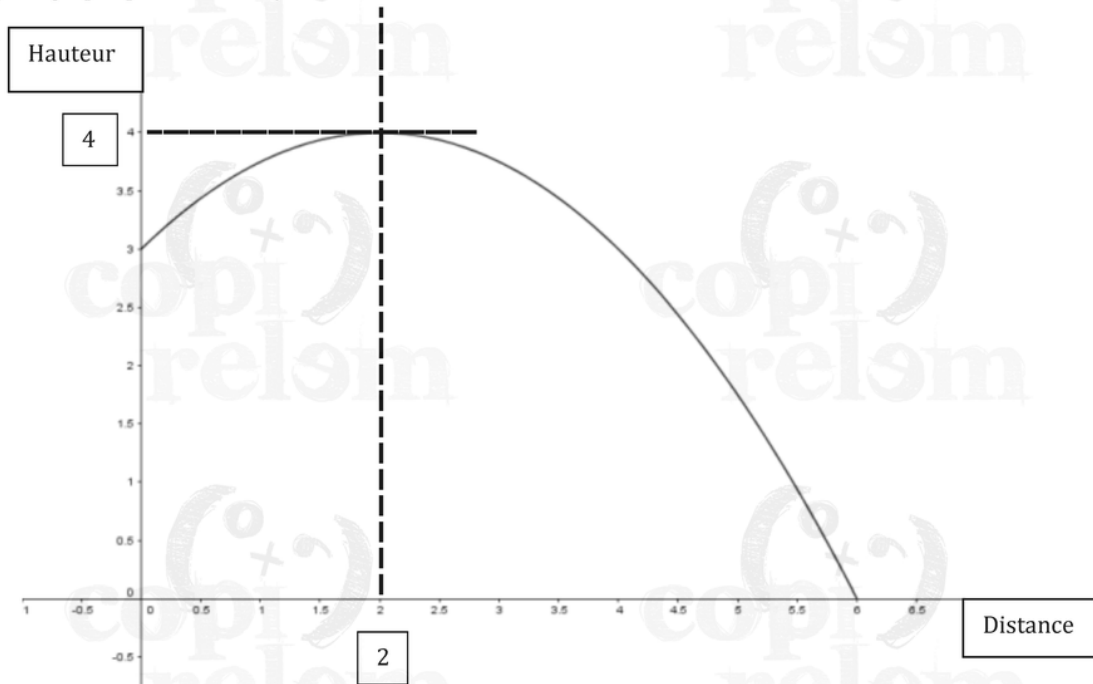
Quand la goutte d'eau sort de la colonne, elle est à une distance 0 de l'axe vertical. Par lecture sur la figure, elle est à une hauteur de 3 m.

1) b) Distance du centre du carré à laquelle la goutte d'eau retombe

Quand la goutte d'eau retombe, la hauteur est 0 m. Par lecture sur la figure, elle est à une distance de 6 m de l'axe vertical.

1) c) Détermination de la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

Pour déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau, on trace la parallèle à l'axe des abscisses tangente à la courbe à son maximum et l'intersection de cette parallèle avec l'axe des ordonnées donne l'ordonnée de ce maximum. On lit graphiquement l'abscisse correspondante. Par lecture sur ces deux axes, la hauteur maximale est environ 4 m pour une distance à l'axe vertical de 2 m environ (voir graphique ci-dessous).

**2) Expression algébrique de la fonction représentée graphiquement ci-dessus**

Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

avec b et c à déterminer.

a) Images, en fonction de b et c , des nombres 0 et 6 par la fonction f

$$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + b \times 0 + c = c.$$

$$f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 + b \times 6 + c = -9 + 6b + c.$$

b) Détermination des nombres b et c

La courbe représentant graphiquement la fonction f passe par les points de coordonnées $(0 ; 3)$ et $(6 ; 0)$.

On a donc : $f(0) = 3$ et $f(6) = 0$.

On en déduit que $c = 3$ et $-9 + 6b + c = 0$.

D'où $6b = 6$ c'est à dire $b = 1$

L'expression algébrique de la fonction est donc $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

c) Nouvelle expression de la fonction f

On développe l'expression donnée $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [0 ; 6].$$

On retrouve l'expression obtenue en b).

d) Hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

$(x - 2)^2$ est un carré donc un nombre positif.

Par conséquent $-\frac{1}{4}(x - 2)^2$ est un nombre négatif et sa plus grande valeur est 0.

On en déduit que la somme $-\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$ est donc inférieure ou égale à 4 ;

d'où $f(x) \leq 4$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 6]$.

Comme $-\frac{1}{4}(x - 2)^2 = 0$, pour $x = 2$, on peut conclure que .

la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau est 4 m pour une distance à l'axe de 2 m.

Remarque

On pourrait aussi comparer $f(x)$ avec 4 et calculer $f(x) - 4$:

$$f(x) - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 \text{ et par suite } f(x) \leq 4.$$

C - Un peu de verdure**1) Distance(s) possible(s) entre deux arbustes**

La distance entre deux arbustes est toujours la même sur la longueur et la largeur du rectangle et est un nombre entier de mètres. On en déduit que cette distance est à la fois un diviseur de 308 et de 132.

Procédure 1 : par le PGCD (plus grand diviseur commun)

Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.

Calcul du PGCD :

$308 = 11 \times 4 \times 7$ et $132 = 11 \times 3 \times 4$ donc $11 \times 4 = 44$ est le PGCD de 308 et 132.

Les distances possibles sont les diviseurs de 44 soient : **1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44.**

Procédure 2 : par l'énumération des diviseurs de chacun des nombres

Diviseurs de 308 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 14 ; 22 ; 28 ; 44 ; 77 ; 154 ; 308

Diviseurs de 132 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 11 ; 12 ; 22 ; 33 ; 44 ; 66 ; 132

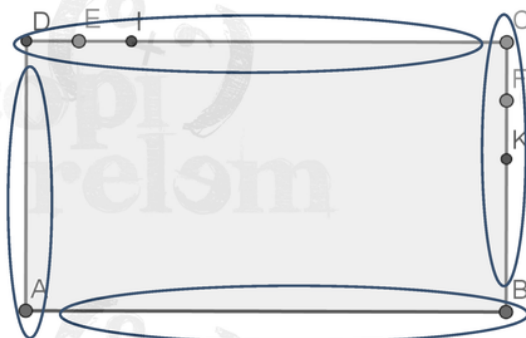
Les diviseurs communs sont : 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44, ce qui correspond aux **distances possibles entre deux arbustes.**

2) Nombre d'arbustes

Parmi ces nombres, un seul est supérieur à 3 et premier : c'est 11. Donc la distance entre chaque arbuste est 11 m.

Procédure 1

Comme les arbustes sont plantés sur le contour du rectangle de dimensions 308 m par 132 m avec un arbuste à chaque sommet du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes. Sur la longueur, il y a 28 intervalles ($308 : 11$) et sur la largeur, il y en a 12 ($132 : 11$).



Si on ne prend qu'un arbuste de sommet sur chaque côté du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes (autrement ce serait un de plus).

Le nombre d'arbustes est $(28 + 12) \times 2 = 80$.

Procédure 2

Sur un contour fermé, le nombre d'intervalles est égal au nombre d'arbustes.

Calcul du périmètre : $(308 \text{ m} + 132 \text{ m}) \times 2 = 880 \text{ m}$; on divise ce périmètre par la distance entre deux arbustes : $880 : 11 = 80$.

Il y a donc 80 arbustes à déplacer.

1) Nombre de combinaisons d'un code à quatre chiffres

Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. : □□□□

Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Il y a ainsi 7 possibilités (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) pour chacune des cases.

Donc il y a $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ combinaisons pour ce code (7 pour le premier chiffre, 7 pour le 2^e, 7 pour le 3^e et 7 pour le 4^e chiffre)

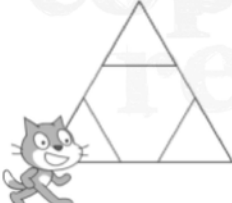
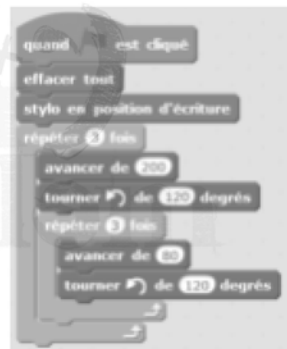
Or $7^4 = 2401$.

La réponse attendue est donc la proposition D.

Remarque

Il s'agit de déterminer la réponse parmi cinq propositions très différentes. Un ordre de grandeur du nombre $7^4 = 49^2 \approx 50^2 = 2500$ permet de conclure que la réponse est la proposition D.

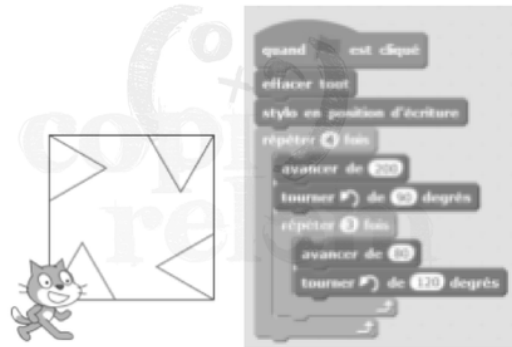
2) Figure non obtenue par l'un des programmes proposés

			
Ce bloc permet de construire un carré de côté 200 u. <i>L'angle de 90 degrés correspond à l'angle « externe » formé par deux côtés consécutifs du carré et 200 est la longueur du côté.</i>	Ce bloc permet de construire un carré de côté 80 u.	Ce bloc permet de construire un triangle équilatéral de côté 200 u. <i>L'angle de 120 degrés correspond à l'angle « externe » formé par deux côtés consécutifs du triangle et 200 est la longueur du côté.</i>	Ce bloc permet de construire un triangle équilatéral de côté 80 u.
Le programme 1 permet de construire la figure C : Si l'on analyse le programme 1, il s'agit de construire un triangle équilatéral de côté 200 u dans lequel sont construits des triangles équilatéraux de côté 80 u à chaque angle : figure C. <i>Un côté du grand triangle est tracé, puis le petit triangle appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du grand triangle...</i>		 	

Le programme 2 permet de construire la figure A :

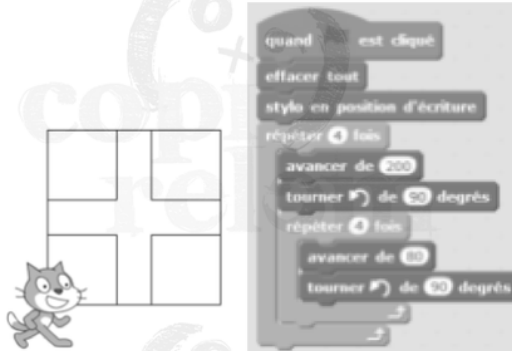
Si l'on analyse le programme 2, il s'agit de construire un carré de côté 200 u dans lequel sont construits des triangles équilatéraux de côté 80 u à chaque angle : figure A.

Un côté du grand carré est tracé, puis le petit triangle appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du carré...

**Le programme 3 permet construire la figure B :**

Si l'on analyse le programme 3, il s'agit de construire un carré de côté 200 u dans lequel on construit des carrés de côté 80 u dans chaque angle : figure B

Un côté du grand carré est tracé, puis le petit carré appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du grand carré...



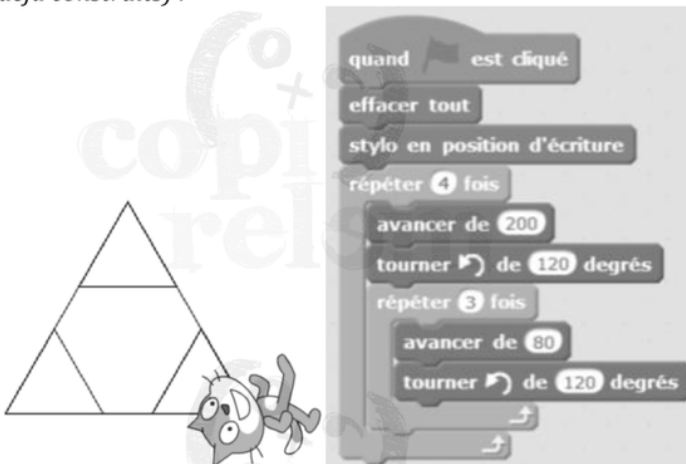
Il n'y a pas de programme pour construire la figure D.

La réponse attendue est donc la figure D.

Remarque

On pourrait penser à se fier à des indices de surface (ce qui fonctionne ici car il n'y a pas de piège) : par exemple boucle de 4 pour construire un carré, boucle de 3 pour construire un triangle.

Cependant, le programme suivant, avec une boucle de 4, construit un triangle (le stylo repasse sur des traits déjà construits) :

**3) Consommation en 1 h 30 min de trajet à la vitesse de 70 m/s**

La consommation d'une voiture de course est 17 L au 100 km à une vitesse de 70 m/s.

Si on suppose que la voiture roule régulièrement, cette situation est modélisée par la proportionnalité, ce qui permet de trouver la consommation en 1 h 30 min de trajet à 70 m/s. La consommation est considérée proportionnelle à la distance parcourue en roulant à la même vitesse.

Calcul de la distance parcourue puis de la consommation*Méthode 1*

- calcul de la distance parcourue

À cette vitesse, 70 m/s, en 1 h 30 min = 60 min + 30 min = 90 min = $90 \times 60 \text{ s} = 5\,400 \text{ s}$, il parcourt :
 $70 \text{ m/s} \times 5\,400 \text{ s} = 378\,000 \text{ m} = 378 \text{ km}$.

- calcul de la consommation

La voiture consomme 17 litres d'essence aux 100 km. Comme $378 \text{ km} = 3,78 \times 100 \text{ km}$, elle consommera : $17 \text{ L} \times 3,78 = 64,26 \text{ L}$.

La réponse attendue est donc la proposition D.*Méthode 2*

- calcul de la distance parcourue

Conversion de la vitesse donnée en m/s en km/h c'est-à-dire :

$$\frac{70 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{70 \text{ m} \times 3600}{1 \text{ s} \times 3600} = \frac{252 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 252 \text{ km/h}.$$

En 1 h 30 min, la voiture a parcouru $1,5 \text{ h} \times 252 \text{ km/h} = 378 \text{ km}$.

(pour multiplier 252 par 1,5, on peut utiliser le fait numérique $0,5 = \frac{1}{2}$;

d'où $252 \text{ km} + 252 \text{ km} : 2 = 252 \text{ km} + 126 \text{ km} = 378 \text{ km}$).

- calcul de la consommation

La voiture consomme 17 litres d'essence aux 100 km. Comme $378 \text{ km} = 3,78 \times 100 \text{ km}$, elle consommera : $17 \text{ L} \times 3,78 = 64,26 \text{ L}$.

La réponse attendue est donc la proposition D.

Méthode 3 : en plaçant les données dans un tableau pour organiser les données et mettre en évidence les relations

				$\times 3,78$
distance	70 m	$70 \text{ m} \times 3600 = 378 \text{ km}$	100 km	378 km
temps	1 s	$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$		
consommation			17 L	$17 \text{ L} \times 3,78 = 64,26 \text{ L}$

$\times 3600$

La réponse attendue est donc la proposition D.

1) Rayon du gâteau numéro 3*Méthode 1 : par étapes de calculs successifs*

Le rayon du gâteau n° 1 est $r_1 = 30$ cm ; le rayon du gâteau n°2 est $r_2 = \frac{2}{3} \times r_1 = \frac{2}{3} \times 30$ cm = 20 cm ;
le rayon du gâteau n° 3 est $r_3 = \frac{3}{4} \times r_2 = \frac{3}{4} \times 20$ cm = 15 cm.

Méthode 2

$$r_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 30 \text{ cm} = \frac{1}{2} \times 30 \text{ cm} = 15 \text{ cm}.$$

2) Volume total exact de la pièce montée

Rappel du volume d'un cylindre :

$\pi \times r^2 \times h$ avec r rayon du cylindre et h sa hauteur.

La hauteur est la même pour les trois gâteaux : $h = 10$ cm.

On somme les volumes des trois gâteaux (en cm^3) :

$$\pi \times r_1^2 \times h + \pi \times r_2^2 \times h + \pi \times r_3^2 \times h = 10\pi \times (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 10\pi (30^2 + 20^2 + 15^2) = 15250\pi.$$

Le volume total exact de la pièce montée est $15\,250\pi \text{ cm}^3$.

3) Fraction du volume total représentée par le volume du gâteau numéro 3

Pour calculer la fraction du volume total que représente le volume du gâteau n°3, on calcule le rapport :

$$\frac{V_3}{V_{\text{total}}} = \frac{2250\pi}{15\,250\pi} = \frac{9 \times 250}{61 \times 250} = \frac{9}{61},$$

écrit sous forme d'une fraction irréductible car 61 n'est pas un multiple de 3.

Le volume du gâteau n°3 représente les $\frac{9}{61}$ du volume du gâteau total.

Remarque préalable

Dans cet énoncé, il y a incompatibilité entre la représentation du patron du premier dé et la formulation « Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6. »

Deux hypothèses sont donc possibles : Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 2, 3, 4, 6 comme indiqué sur le patron ou 1, 2, 3, 4, 5, 6 du dé classique comme le sous-entend la formulation.

Première hypothèse :

Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 2, 3, 4, 6, soit cinq valeurs possibles. Pour le deuxième dé, les faces valent 2, 2, 3, 3, 3 et 4, soit trois valeurs possibles.

La somme des valeurs de deux dés est donc un nombre compris entre 3 (1 + 2) et 10 (6 + 4) sans le 9.

1) Valeur du deuxième dé

Un joueur a gagné un jeton, si la somme obtenue est un nombre pair différent de 6, c'est-à-dire si la somme est 4 ou 8 ou 10. Sachant que le premier dé indique « 4 », le deuxième dé indiquant un nombre supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à 4, la somme ne peut pas être égale à 4 ou à 10.

Le deuxième dé indique donc « 4 ».

(il est possible de s'appuyer sur la ligne « 4 » du tableau de la méthode 2 ci-après : seul « 8 » est pair et différent de 6 et il est dans la colonne du « 4 ».)

2) Probabilité d'obtenir trois jetons

Pour obtenir 3 jetons, il faut obtenir une somme de 6 avec les deux dés.

Méthode 1 : calcul des probabilités

Les combinaisons possibles sont notées de la façon suivante : (premier dé ; deuxième dé) soit (2 ; 4), (3 ; 3), (4, 2) donc la probabilité d'obtenir 6 est la somme des probabilités des éléments élémentaires constituées par ces paires.

Par exemple, pour $P(2 ; 4)$, la probabilité est le produit des deux probabilités $P_1(2)$ (la probabilité pour le dé 1 d'obtenir 2) et $P_2(4)$ (la probabilité sur le deuxième dé d'obtenir 4).

$$\begin{aligned} P(\text{somme de 6}) &= P(2 ; 4) + P(3 ; 3) + P(4 ; 2) \\ &= P_1(2) \times P_2(4) + P_1(3) \times P_2(3) + P_1(4) \times P_2(2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$P(\text{somme 6}) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}.$$

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 7 possibilités d'obtenir la somme égale à 6 et il y a 36 possibilités différentes donc la probabilité d'obtenir 3 jetons est $\frac{7}{36}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

Un arbre de probabilités pondéré, constitué de 15 (3×5) branches permet également d'obtenir la réponse mais il est plus difficile à gérer.

3) Probabilité de ne pas obtenir de jetons

On n'obtient pas de jeton si la somme est impaire donc pour les sommes : 3, 5, 7 ou 9.

Méthode 1 : calcul des probabilités

$P(\text{somme impaire}) = P(\text{obtenir } 3, 5, 7 \text{ ou } 9)$

$P(\text{somme impaire}) = P(1; 2) + P(1; 4) + P(2; 3) + P(3; 2) + P(4; 3) + P(3; 4) + P(6; 3)$ soit :

$$\begin{aligned}
 &P_1(1) \times P_2(2) + P_1(1) \times P_2(4) + P_1(2) \times P_2(3) + P_1(3) \times P_2(2) + P_1(4) \times P_2(3) + P_1(3) \times P_2(4) + P_1(6) \times P_2(3) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

La probabilité de ne pas obtenir de jeton est égale à $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme impaire et il y a 36 possibilités différentes

donc la probabilité de ne pas obtenir de jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question précédente)

4) Probabilité d'obtenir au moins un jeton.

(obtenir 3 jetons) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui permettent de gagner 3 jetons, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple vaut 6.

(ne pas obtenir de jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui ne permettent pas le gain de jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est impaire.

(obtenir un seul jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui permettent de gagner 1 seul jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est paire et différente de 6.

Ces trois événements sont disjoints et leur réunion est l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) que l'on peut obtenir lors d'un lancer des deux dés, soit l'univers Ω , ensemble des événements possibles.

$$\text{Univers } \Omega = (\text{obtenir 3 jetons}) \cup (\text{ne pas obtenir de jeton}) \cup (\text{obtenir un seul jeton}).$$

Méthode 1 : événement contraire

(Obtenir au moins un jeton) est l'événement contraire à l'événement (ne pas obtenir de jeton).

Par conséquent :

$$P(\text{obtenir au moins un jeton}) = 1 - P(\text{ne pas obtenir de jeton}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : calcul de probabilités

Obtenir au moins un jeton correspond à la réunion de deux événements (obtenir un jeton) et (obtenir trois jetons).

$$P(\text{obtenir au moins un jeton}) = P(\text{obtenir exactement un jeton}) + P(\text{obtenir trois jetons})$$

$$\begin{aligned} P(\text{obtenir exactement un jeton}) &= P(\text{pair différent de 6}) = P(\text{somme égale à 4 ou 8 ou 10}) \\ &= P(4) + P(8) + P(10) = P((1;3)) + P((2;2)) + P((4;4)) + P((6;2)) + P((6;4)) \\ &= P_1(1) \times P_2(3) + P_1(2) \times P_2(2) + P_1(4) \times P_2(4) + P_1(6) \times P_2(2) + P_1(6) \times P_2(4) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3+4+1+2+1}{36} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

$$\text{et } P(\text{obtenir 3 jetons}) = \frac{7}{36}, \text{ d'après la question 2.}$$

$$\text{Donc } P(\text{obtenir au moins un jeton}) = \frac{11}{36} + \frac{7}{36} = \frac{18}{36}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme paire et il y a 36 possibilités différentes

$$\text{donc la probabilité d'obtenir au moins un jeton est } \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Méthode 4 : utilisation d'un arbre de probabilités
(comme indiqué à la question 2)

Deuxième hypothèse

Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, soit six valeurs possibles. Pour le deuxième dé, les faces valent 2, 2, 3, 3, 3 et 4, soit trois valeurs possibles.

La somme des valeurs de deux dés est donc un nombre compris entre 3 et 10.

Le premier dé est un dé « classique » pour lequel chacune des faces est équiprobable.

Avec les notations précédentes : $P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = P_1(4) = P_1(5) = P_1(6) = \frac{1}{6}$.

Il s'agit donc de garder le même raisonnement mais les combinaisons changent ainsi que les valeurs de $P_1(2)$ et de $P_1(5)$.

1) Valeur du deuxième dé

Un joueur a gagné un jeton, si la somme obtenue est un nombre pair différent de 6, c'est-à-dire si la somme peut être 4 ou 8 ou 10. Sachant que le premier dé indique « 4 », le deuxième dé indiquant un nombre supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à 4, la somme ne peut pas être égale à 4 ou à 10.

Le deuxième dé indique donc « 4 ».

(il est possible de s'appuyer sur la ligne « 4 » du tableau de la méthode 2 ci-après : seul « 8 » est pair et différent de 6 et il est dans la colonne du « 4 ».)

2. Probabilité d'obtenir trois jetons

Pour obtenir 3 jetons, il faut obtenir une somme de 6 avec les deux dés.

Méthode 1 : calcul des probabilités

Les combinaisons possibles sont notées de la façon suivante : (premier dé ; deuxième dé) soit (2 ; 4), (3 ; 3), (4, 2) donc la probabilité d'obtenir 6 est la somme des probabilités des éléments élémentaires constituées par ces paires.

Par exemple, pour $P(2 ; 4)$, la probabilité est le produit des deux probabilités $P_1(2)$ (la probabilité pour le dé 1 d'obtenir 2) et $P_2(4)$ (la probabilité sur le deuxième dé d'obtenir 4).

$$\begin{aligned} P(\text{somme de 6}) &= P(2 ; 4) + P(3 ; 3) + P(4 ; 2) \\ &= P_1(2) \times P_2(4) + P_1(3) \times P_2(3) + P_1(4) \times P_2(2) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$P(\text{somme 6}) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
5	7	7	8	8	8	9
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 6 possibilités d'obtenir la somme égale à 6 et il y a 36 possibilités différentes donc la probabilité d'obtenir 3 jetons $\frac{6}{36}$, soit $\frac{1}{6}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

Un arbre de probabilités pondéré, constitué de 18 (3×6) branches permet également d'obtenir la réponse mais il est plus difficile à gérer.

3) Probabilité de ne pas obtenir de jetons

On n'obtient pas de jeton si la somme est impaire donc pour les sommes : 3, 5, 7 ou 9.

Méthode 1 : calcul des probabilités

$$P(\text{somme impaire}) = P(\text{obtenir 3, 5, 7 ou 9})$$

$$P(\text{obtenir 3}) = P(1; 2) = P_1(1) \times P_2(2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{36}.$$

$$P(\text{obtenir 5}) = P(1; 4) + P(2; 3) + P(3; 2) = P_1(1) \times P_2(4) + P_1(2) \times P_2(3) + P_1(3) \times P_2(2)$$

$$P(\text{obtenir 5}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$P(\text{obtenir 7}) = P(3; 4) + P(4; 3) + P(5; 2) = P_1(3) \times P_2(4) + P_1(4) \times P_2(3) + P_1(5) \times P_2(2)$$

$$P(\text{obtenir 7}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$P(\text{obtenir 9}) = P(5; 4) + P(6; 3) = P_1(5) \times P_2(4) + P_1(6) \times P_2(3) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{36}.$$

$$\text{Donc } P(\text{somme impaire}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité de ne pas obtenir de jeton est égale à $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
5	7	7	8	8	8	9
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme impaire et il y a 36 possibilités différentes

donc la probabilité de ne pas obtenir de jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question précédente)

4) Probabilité d'obtenir au moins un jeton

(obtenir 3 jetons) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui permettent de gagner 3 jetons, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple vaut 6.

(ne pas obtenir de jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui ne permettent pas le gain de jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est impaire.

(obtenir un seul jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) qui permettent de gagner 1 seul jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est paire et différente de 6.

Ces trois événements sont disjoints et leur réunion est l'ensemble des couples (nombre du 1^{er} dé, nombre du 2^{ème} dé) que l'on peut obtenir lors d'un lancer des deux dés, soit l'univers Ω , ensemble des événements possibles.

$$\text{Univers } \Omega = (\text{obtenir 3 jetons}) \cup (\text{ne pas obtenir de jeton}) \cup (\text{obtenir un seul jeton}).$$

Méthode 1 : évènement contraire

(Obtenir au moins un jeton) est l'évènement contraire à l'évènement (ne pas obtenir de jeton).

Par conséquent :

$$P(\text{obtenir au moins un jeton}) = 1 - P(\text{ne pas obtenir de jeton}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : calcul de probabilités

Obtenir au moins un jeton correspond à la réunion de deux évènements (obtenir un jeton) et (obtenir trois jetons).

$$P(\text{obtenir au moins un jeton}) = P(\text{obtenir exactement un jeton}) + P(\text{obtenir trois jetons})$$

$$P(\text{obtenir exactement un jeton}) = P(\text{pair différent de 6}) = P(\text{somme égale à 4 ou 8 ou 10})$$

$$= P(4) + P(8) + P(10)$$

$$= P((1; 3)) + P((2; 2)) + P((4; 4)) + P((5; 3)) + P((6; 2)) + P((6; 4))$$

$$= P_1(1) \times P_2(3) + P_1(2) \times P_2(2) + P_1(4) \times P_2(4) + P_1(5) \times P_2(3) + P_1(6) \times P_2(2) + P_1(6) \times P_2(4)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{12}{36}$$

$$\text{et } P(\text{obtenir 3 jetons}) = \frac{6}{36}, \text{ d'après la question 2.}$$

$$\text{Donc } P(\text{obtenir au moins un jeton}) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} = \frac{18}{36}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

2 ^{ème} dé 1 ^{er} dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	6
3	5	5	6	6	6	7
4	6	6	7	7	7	8
5	7	7	8	8	8	9
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme paire et il y a 36 possibilités différentes ;

$$\text{donc la probabilité d'obtenir au moins un jeton est } \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Méthode 4 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question 2)

1) a) Réponse « 33 » pour le nombre de départ « 4 »*Méthode 1 : algébrisation de la situation*soit x le nombre de départ :

Prendre un nombre	x
Ajouter 3 à ce nombre	$x + 3$
Élever la somme précédente au carré	$(x + 3)^2$
Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	$(x + 3)^2 - x^2$

Donc si l'on remplace x par 4 on trouve : $(4 + 3)^2 - 4^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$.*Méthode 1 bis*

Pour la proposition finale, on peut

- soit factoriser en $(x + 3 + x) \times (x + 3 - x) = 3 \times (2x + 3)$
Pour $x = 4$, on obtient $3 \times (2 \times 4 + 3) = 3 \times 11 = 33$.
- soit développer en $x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$
Pour $x = 4$, on obtient $6 \times 4 + 9 = 24 + 9 = 33$.

Méthode 2 : lecture du programme « pas à pas »

programme		détails
prendre un nombre	4	4
ajouter 3 à ce nombre	7	$4 + 3$
élever la somme précédente au carré	49	7^2
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	33	$49 - 4^2$

1) b) Résultat obtenu avec « 4,2 » comme valeur de départ*Méthode 1*

$$(4,2 + 3) \times 2 - 4,22 = 34,2.$$

Méthode 1bis

$$3 \times (2 \times 4,2 + 3) = 3 \times 11,4 = 34,2 \text{ ou } 6 \times 4,2 + 9 = 25,2 + 9 = 34,2.$$

Méthode 2 : avec tableur ou calcul des étapes les unes après les autres

programme		détails
prendre un nombre	4,2	4,2
ajouter 3 à ce nombre	7,2	$4,2 + 3$
élever la somme précédente au carré	51,84	$7,2^2$
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	34,2	$51,84 - 4,2^2$

Le résultat obtenu est « 34,2 ».

1) c) Résultat obtenu si on choisit $\frac{7}{10}$ comme valeur de départ*Méthode 1*

$$(0,7 + 3) \times 2 - 0,72 = 13,2.$$

Méthode 1bis

$$3 \times (2 \times 0,7 + 3) = 3 \times 4,4 = 13,2 \quad \text{ou} \quad 6 \times 0,7 + 9 = 4,2 + 9 = 13,2.$$

Méthode 2 : avec tableur ou calcul des étapes les unes après les autres

programme		détails
prendre un nombre	0,7	0,7
ajouter 3 à ce nombre	3,7	$0,7 + 3$
élever la somme précédente au carré	13,69	$3,7^2$
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	13,2	$13,69 - 0,7^2$

Le résultat obtenu est « 13,2 ».

2) Formules à écrire dans les cases B3, B4 et B5

En référence au nombre de départ écrit dans la cellule B2 :

- dans la case B3, on écrit $=B2+3$;
- dans la case B4, on écrit $=B3*B3$ ou $=B3^2$;
- dans la case B5, on écrit $=B4-B2^2$.

3) Deux affirmations

a) **Affirmation 1** : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »

On recherche la solution de $(x + 3)^2 - x^2 = 0$;

en utilisant la factorisation, cette équation est équivalent à $3 \times (2x + 3) = 0$

qui est équivalent à $(2x + 3) = 0$ soit $x = -\frac{3}{2}$.

Donc l'affirmation 1 est fausse.

b) **Affirmation 2** : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »

La factorisation de l'expression $3(2x + 3)$ met en évidence la divisibilité du résultat par 3.

L'affirmation 2 est donc vraie.