

## Une aire de détente

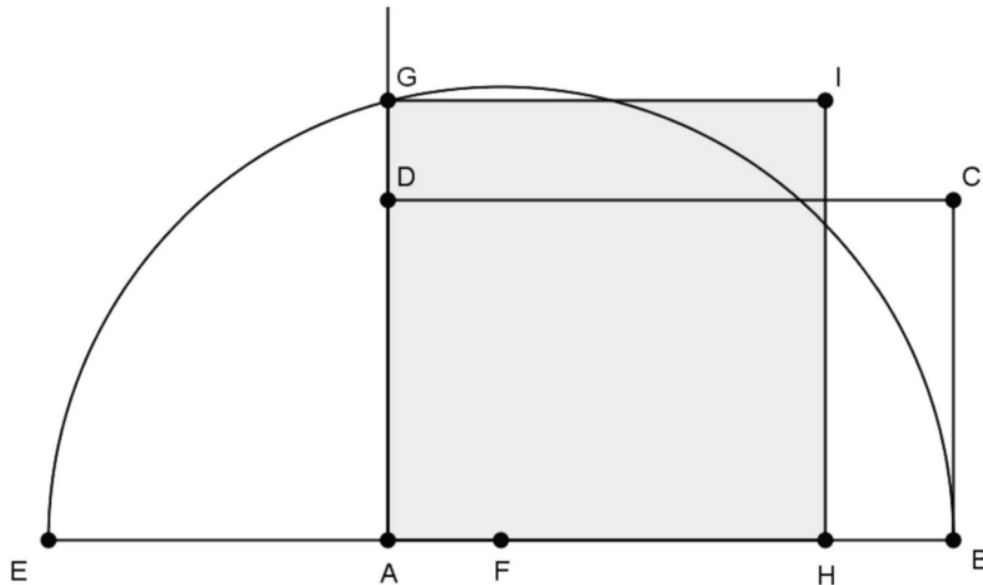
Un architecte paysagiste est chargé de l'embellissement d'une aire de détente.

Avant les travaux, il s'agit d'un terrain rectangulaire. L'architecte a notamment pour mission de construire une aire de détente de forme carrée ayant la même aire que l'aire de détente rectangulaire initiale.

## PARTIE A : une construction

Méthode de Samuel Marolois (1572 -1627), mathématicien et ingénieur militaire hollandais.

Sur le plan de l'architecte, on peut voir la configuration suivante réalisée à partir du rectangle initial ABCD :



Le rectangle ABCD étant donné, avec  $AB > BC$ , le protocole de cette construction est le suivant :

- construire E sur [BA] tel que  $AE = AD$  avec E n'appartenant pas à [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD] en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à [AB].

1) On se place dans le cas où le terrain rectangulaire initial a une longueur de 308 mètres et une largeur de 132 mètres. On veut réaliser un plan à l'échelle de ce terrain, sous forme d'un rectangle ABCD, tel que la longueur du terrain soit représentée par un segment [AB] mesurant 7,7 cm.

a) Montrer que la largeur [AD] du rectangle doit mesurer 3,3 cm.

b) Quelle est l'échelle de ce plan ?

c) Construire le rectangle ABCD et effectuer le protocole de construction donné ci-dessus. Laisser les traits de construction apparents.

d) Calculer les longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan.

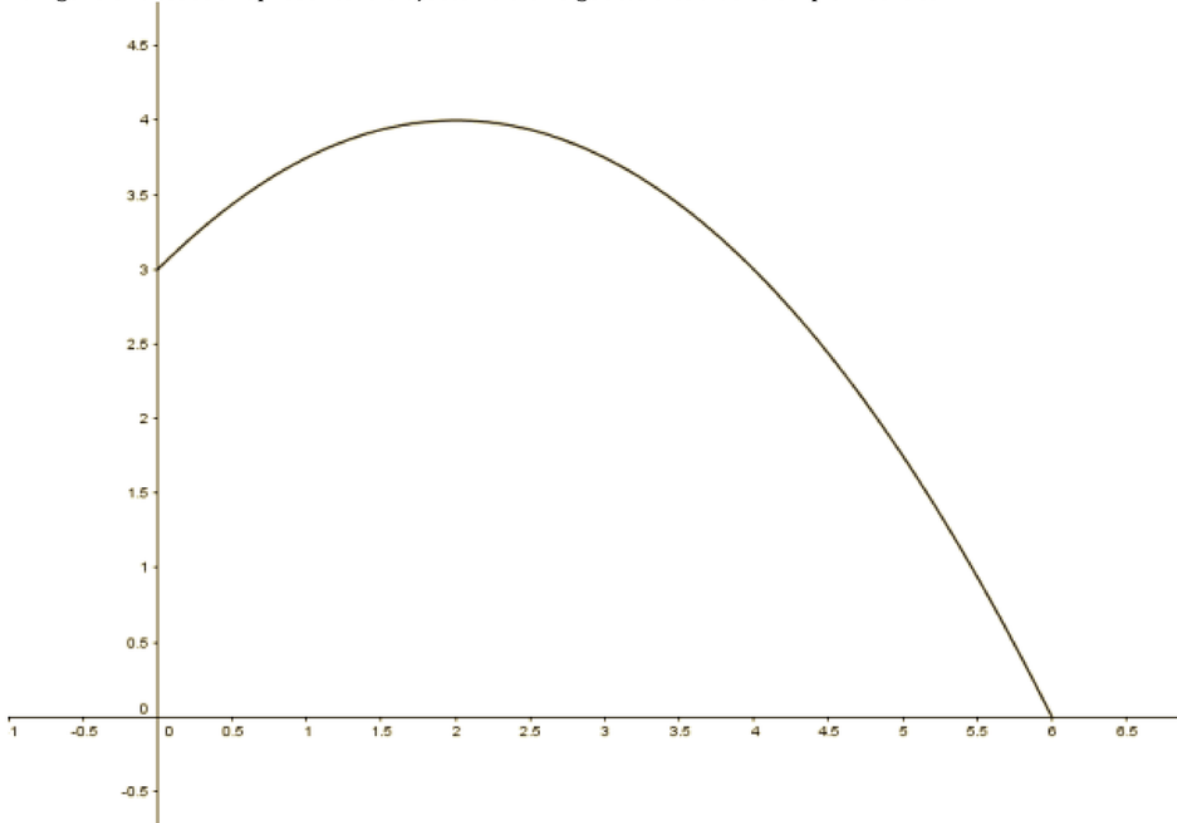
e) En déduire l'aire du carré AGIH sur le plan.

f) En déduire l'aire du carré correspondant dans la réalité et la comparer à l'aire du terrain rectangulaire initial.

2) L'architecte prétend que quelles que soient les dimensions du rectangle initial, le carré AHIG obtenu a toujours la même aire que le rectangle ABCD. Démontrer que cette affirmation est vraie. On pourra poser  $AB = a$  et  $AD = b$  (avec  $a > b$ ).

## PARTIE B : aménagement d'une fontaine

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré AHIG construit précédemment. La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol.

L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées  $(x; y)$ , cela signifie qu'elle est à la distance  $x$ , exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur  $y$ , exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées  $(0; 3)$  et  $(6; 0)$ .

Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

- 1) a) À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?  
b) À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?  
c) Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.
- 2) La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle  $[0; 6]$  par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

où  $b$  et  $c$  sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.

- a) Donner, en fonction de  $b$  et  $c$ , les images respectives de 0 et de 6 par la fonction  $f$ .
- b) En déduire les deux nombres  $b$  et  $c$ .
- c) Prouver que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; 6]$ , on a :

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$$

- d) En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine. Justifier.

## PARTIE C : un peu de verdure

Par souci d'économie, il est décidé de récupérer les arbustes qui avaient été plantés de façon régulière sur le contour d'un terrain rectangulaire de longueur 308 mètres et de largeur 132 mètres.

Il y a un arbuste à chaque coin et la distance entre deux arbustes voisins est toujours la même, c'est un nombre entier de mètres.

- 1) De quelle(s) distance(s) peut-il s'agir ?
- 2) La distance, exprimée en mètre, entre chaque arbuste est un nombre premier supérieur à 3.  
De combien d'arbustes l'architecte dispose-t-il ?

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées est juste.

**Aucune justification n'est attendue.**

- 1) Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Combien y a-t-il de combinaisons ?

A : 720

B : 24

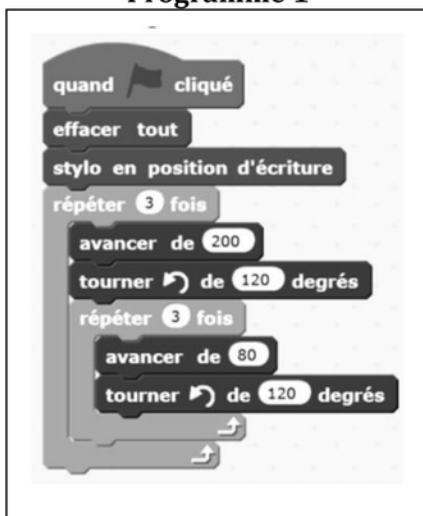
C : 28

D : 2 401

E : 16 384

- 2) Parmi les quatre figures ci-dessous, laquelle n'est pas obtenue avec un des trois programmes proposés ?

Programme 1



Programme 2



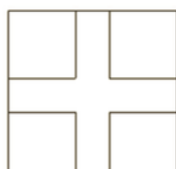
Programme 3



A :



B :



C :



D :



- 3) Un constructeur annonce qu'une voiture de course consomme 17 litres d'essence aux 100 km lorsqu'elle roule sur circuit à la vitesse de 70 m/s.

Quelle sera sa consommation en 1h30min de trajet à cette vitesse ?

A : 17,85 L

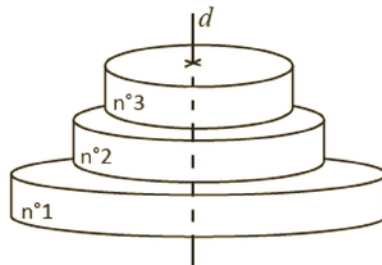
B : 19,83 L

C : 42,84 L

D : 64,26 L

E : 107,1 L

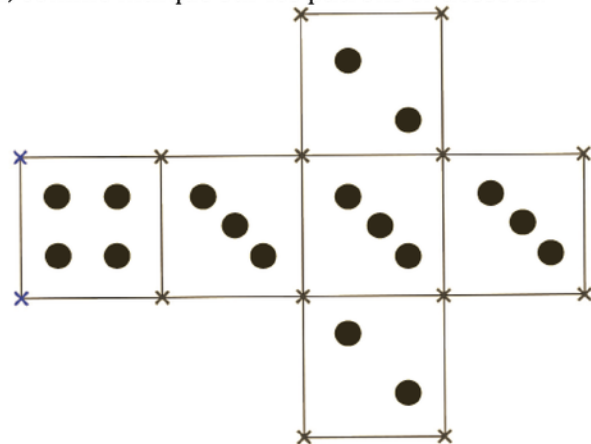
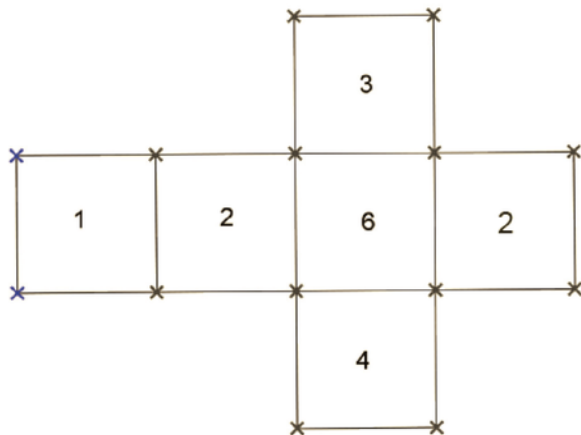
Un élève pâtissier doit présenter, pour son projet de fin d'études, une pièce montée composée de 3 gâteaux cylindriques superposés, tous centrés sur l'axe  $d$  comme l'indique la figure ci-dessous :



- Les trois gâteaux cylindriques sont de même hauteur : 10 cm.
- Le plus grand gâteau cylindrique, gâteau n° 1, a pour rayon 30 cm.
- Le rayon du gâteau n°2 est égal aux  $\frac{2}{3}$  de celui du gâteau n°1.
- Le rayon du gâteau n° 3 est égal aux  $\frac{3}{4}$  de celui du gâteau n°2.

- 1) Calculer le rayon du gâteau n° 3.
- 2) Montrer que le volume total exact de la pièce montée est égal à  $15\,250\pi \text{ cm}^3$ .
- 3) Quelle fraction du volume total représente le volume du gâteau n° 3 ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

On lance deux dés équilibrés. Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6 et le deuxième dé indique un nombre à l'aide des constellations de 2 à 4, comme indiqué sur les patrons ci-dessous.



On additionne ensuite les deux nombres obtenus :

- si la somme est 6 on gagne 3 jetons ;
- si la somme est un nombre pair différent de 6 on gagne 1 jeton ;
- si la somme est un nombre impair on ne gagne rien.

- 1) Un joueur a gagné 1 jeton. Il a obtenu « 4 » avec le premier dé. Que peut-on dire sur le résultat obtenu avec le deuxième dé ? Justifier.
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 jetons ? Justifier.
- 3) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de jetons ? Justifier.
- 4) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un jeton ? Justifier.

Voici un programme de calcul, appliqué sur un tableur :

| A |                                                               | B               |
|---|---------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1 | <b>Programme</b>                                              | <b>Résultat</b> |
| 2 | Prendre un nombre                                             | 5               |
| 3 | Ajouter 3 à ce nombre                                         | 8               |
| 4 | Élever la somme précédente au carré                           | 64              |
| 5 | Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent | 39              |
| 6 |                                                               |                 |
| 7 |                                                               |                 |

- 1) a) Vérifier qu'on obtient 33 en choisissant 4 comme nombre de départ.  
b) Quel résultat obtient-on si on choisit 4,2 comme valeur de départ ?  
c) Quel résultat obtient-on si on choisit  $\frac{7}{10}$  comme valeur de départ ? On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.
- 2) Quelles formules peut-on écrire dans les cases B3 ; B4 et B5 pour obtenir cette feuille de calcul ?
- 3) Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est exacte et justifier la réponse.
  - a) **Affirmation 1** : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »
  - b) **Affirmation 2** : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »