

Remarque

Attention, dans l'énoncé de cette partie, les notations L , r , h désignent tantôt des longueurs, tantôt des mesures exprimées en cm. Dans ce corrigé, nous choisissons d'homogénéiser les notations : les lettres L , r et h désigneront ainsi systématiquement des mesures de longueur (exprimées en cm).

A - Mesure du volume d'une canette « classique »

La longueur du diamètre du disque de base est de 6,6 cm. Ainsi l'aire de la base est égale à $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$.

Méthode 1

On en déduit le volume du cylindre : $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 \text{ cm}^3 \approx 335,1 \text{ cm}^3$
(valeur approchée par défaut à 0,1 cm³ près).

Or : 1 cL = 10 cm³, ainsi la contenance du cylindre qui est d'environ **33,5 cL est supérieure à 33 cL**.

Méthode 2

Le volume du cylindre est : $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 \text{ cm}^3$.

Or : $\pi > 3,14$.

Donc : $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 > 3,14 \times \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8$.

Soit : $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 > 335,10708 > 335$.

Puisque 1 cL = 10 cm³, on a : $335 \text{ cm}^3 = 33,5 \text{ cL}$.

On en déduit que la contenance de la canette classique est supérieure à 33 cL.

Remarque

Les unités usuelles françaises de mesure de volume sont le m³ avec ses sous-unités et sur-unités. Les unités usuelles françaises de contenance sont le L et ses sous et sur unités. Ces deux systèmes d'unités peuvent être mis en relation notamment par l'une des égalités suivantes : 1 dm³ = 1 L ou 1 cL = 10 cm³.

B - Mesure de la hauteur d'une canette « slim »

On sait que : 33 cL = 330 cm³.

Le volume de la canette slim est : $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h \text{ cm}^3$, où h désigne la mesure de la hauteur de la canette.

Méthode 1

On cherche la valeur de h pour laquelle le volume de la canette slim est au moins égal à 330 cm³.

On cherche donc la valeur de h telle : $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h \geq 330$.

Ou encore telle que : $h \geq \frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2}$

Or $\frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$ (valeur arrondie à 0,1 près).

On en déduit que **la hauteur de la canette « slim », doit être, d'au moins 13,4 cm (au millimètre près).**

Méthode 2

On cherche la valeur h pour laquelle : $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h = 330$.

Soit : $h = \frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$ (valeur arrondie à 0,1 près).

Puisque le volume d'un cylindre de base donnée augmente lorsque sa hauteur augmente, on en déduit que :
la hauteur de la canette « slim » doit être d'au moins 13,4 cm (au millimètre près).

C - Mesure de l'aire du patron d'une canette

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, toutes les mesures d'aire en cm^2 , toutes les mesures de volume en cm^3 .

La mesure (en cm) du rayon de la base du cylindre modélisant la canette est notée r , celle de la hauteur de la canette est notée h .

1) Vérification

Le volume du cylindre formé par la canette est égal à : $\pi \times r^2 \times h \text{ cm}^3$.

Or le volume de la canette est 330 cm^3 .

Ainsi : $\pi \times r^2 \times h = 330$.

Et donc : $h = \frac{330}{\pi r^2}$.

La mesure de la hauteur de la canette est $\frac{330}{\pi r^2}$.

2) Mesure de la longueur du rectangle

La longueur du rectangle coïncide avec le périmètre du disque de base.

Ainsi la mesure L de la longueur du rectangle est donnée par : $L = 2\pi r$.

La mesure de la longueur du rectangle est égale à $2\pi r$.

3) Mesure de l'aire de la partie rectangulaire

La mesure (en cm^2) de l'aire de la partie rectangulaire est donnée par : $L \times h$.

D'après la question 1, h peut s'exprimer en fonction de r : $h = \frac{330}{\pi r^2}$.

D'après la question 2, L peut s'exprimer en fonction de r : $L = 2\pi r$.

On en déduit que : $L \times h = 2\pi r \times \frac{330}{\pi r^2}$.

Donc : $L \times h = \frac{660}{r}$.

La mesure de l'aire de la partie rectangulaire est égale à $\frac{660}{r}$.

4) Mesure de l'aire totale du patron

L'aire totale du patron du cylindre est égale à la somme de l'aire de la partie rectangulaire $\left(\frac{660}{r} \text{ cm}^2\right)$

et de deux fois l'aire du disque de base ($\pi r^2 \text{ cm}^2$), soit : $\frac{660}{r} \text{ cm}^2 + \pi r^2 \text{ cm}^2$.

La mesure de l'aire totale du patron est donc égale à : $\frac{660}{r} + 2\pi r^2$.

D - Lecture graphique

Remarque

Le graphique présenté dans cette partie correspond à l'ensemble des points de coordonnées $(r, f(r))$: en abscisses, est donnée la mesure r (exprimée en cm) du rayon du disque de base ; en ordonnées, est donnée la mesure $f(r)$ (exprimée en cm^2) de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'un cylindre de révolution dont la base a un rayon de longueur r cm.

1) Aire de la surface de métal pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm

Pour $r = 1,5$, on lit graphiquement : $f(r) \approx 450$.

L'aire de la surface de métal nécessaire est environ 450 cm^2 .

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction f .

On sait que : $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

Donc : $f(1,5) = 2\pi \times 1,5^2 + \frac{660}{1,5} \approx 454$ (valeur arrondie à 1 près).

Dans ce cas, on trouve que l'aire de la surface de métal nécessaire est 454 cm^2 , ce qui correspond à une meilleure approximation que la lecture graphique.

2) Valeur(s) de r pour une aire de 300 cm^2

Dans cette question, il s'agit de lire sur le graphique les abscisses des points d'ordonnée égale à 300, autrement dit de lire les valeurs de r pour lesquelles : $f(r) = 300$.

On obtient deux possibilités : une valeur que l'on peut arrondir à 2,6 et une valeur comprise entre 5 et 5,5 que l'on peut arrondir à 5,25.

Une aire de 300 cm^2 correspond à un cylindre dont le rayon de la base est d'environ 2,6 cm, ou d'environ 5,25 cm.

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction f .

On sait que : $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

On cherche donc le nombre positif r tel que : $f(r) = 300$.

Autrement dit, on cherche le nombre positif r tel que : $2\pi r^2 + \frac{660}{r} = 300$.

Dans ce cas, il est nécessaire de résoudre une équation du troisième degré à une inconnue. Ceci est possible, mais ne constitue pas un attendu pour le concours. Nous ne présentons donc pas cette méthode ici.

3) Canette utilisant le moins de métal

Méthode 1

Pour la canette classique, $r = 3,3$ et pour la canette « slim », $r = 2,8$. Or sur l'intervalle $[2,5 ; 3,5]$ la fonction f est décroissante (conjecture graphique), ainsi : $f(2,8) > f(3,3)$.

La canette classique utilise donc moins de métal que la canette slim.

Méthode 2

Pour la canette classique, $r = 3,3$ et on estime graphiquement : $f(3,3) \approx 270$.

Pour la canette « slim », $r = 2,8$ et on estime graphiquement : $f(2,8) \approx 280$.

On a donc : $f(2,8) > f(3,3)$.

La canette classique utilise ainsi moins de métal que la canette slim.

Remarque

Pour la méthode 2, on pourrait également utiliser des inégalités : $f(3,3) < 275$ et $f(2,8) > 275$.

Remarque

L'énoncé invite à une réponse graphique, mais on peut également suggérer une réponse basée sur les calculs effectifs :

$$f(3,3) = \frac{660}{3,3} + 2\pi(3,3)^2 \approx 268 \quad \text{et} \quad f(2,8) = \frac{660}{2,8} + 2\pi(2,8)^2 \approx 284.$$

4) Rayon de base pour une aire minimale à volume donné

La surface minimale de métal correspond sur le graphique au point de la courbe dont l'ordonnée est la plus petite. Par lecture graphique, ce point correspond à une abscisse comprise entre 3,5 et 4 (valeur que l'on peut arrondir à 3,75).

Pour un rayon compris entre 3,5 cm et 4 cm (valeur que l'on peut arrondir à 3,75 cm), on obtient une surface métallique d'aire minimale.

Remarque

Une conjecture graphique nous permet de dire que la fonction est décroissante jusqu'à une valeur proche de 3,75 puis croissante. Ainsi le minimum est atteint pour une valeur proche de 3,75.

E - Utilisation d'un tableur**1) Formule**

L'expression de la fonction f est donnée par la formule suivante :

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}.$$

Avec le tableur, on utilise une valeur approchée de π que nous choisissons par exemple à 10^{-2} près, soit 3,14.

Dans la cellule B2 on peut alors noter, l'une des formules ci-dessous :

$$=660/B1+2*\pi*B1*B1$$

$$=660/B1+2*\pi*B1^2$$

Remarque

Dans les formules ci-dessus, on peut remplacer B1 par B\$1 (mais pas par \$B1 ou \$B\$1).

L'utilisation de π dans les formules proposées est une formulation qui ne donne pas le bon résultat sur certains tableurs. En effet, sous excel par exemple, il faut écrire PI() qui réfère à une valeur approchée de π à 15 décimales près (valeur préenregistrée).

On peut également remplacer π par une valeur approchée de π que nous choisissons par exemple à 10^{-2} près, soit 3,14.

2) Encadrement

Par lecture du tableau de valeur, on constate que la plus petite valeur de $f(r)$ affichée est 264,40 donnée pour $r = 3,7$ ($f(3,6) \approx 264,76$ et $f(3,8) \approx 264,41$). Comme nous n'avons pas d'autres informations concernant les variations de la fonction (notamment s'il existe ou pas des valeurs plus petites prises par la fonction entre 3,6 et 3,8), nous en déduisons que pour r compris entre 3,6 et 3,8, obtient la valeur minimale de $f(r)$.

Pour un rayon compris entre 3,6 cm et 3,8 cm, la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL sera d'aire minimale.

3) Hauteur d'une canette pour un rayon de 3,7 cm et de contenance 33 cL

La question C. 1 donne le lien entre h et r par l'égalité : $h = \frac{330}{\pi r^2}$.

Par conséquent, pour $r = 3,7$ on a : $h \approx 7,6$.

On en déduit que la canette de contenance 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm a pour hauteur 7,6 cm.

F - Aluminium consommé puis recyclé...**1) Masse d'aluminium**

Méthode 1

Pour réaliser le patron de la canette classique, il s'agit de découper une surface d'aire $268,42 \text{ cm}^2$ dans une plaque d'aluminium de $130 \mu\text{m}$.

Or : $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 100 \times 10^{-6} \text{ cm} = 10^{-4} \text{ cm}$.

Donc la plaque d'aluminium a une épaisseur de : $130 \mu\text{m} = 130 \times 10^{-4} \text{ cm}$.

Le volume de la plaque d'aluminium est alors : $268,42 \times 130 \times 10^{-4} \text{ cm}^3$.

La masse volumique de l'aluminium est 2700 kg/m^3 , c'est-à-dire que la masse de 1 m^3 est égale à 2700 kg .

Or : $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$.

Et : $2700 \text{ kg} = 2700 \times 10^3 \text{ g}$.

On en déduit que la masse de 1 cm^3 est égale à : $\frac{2700 \times 10^3}{10^6} \text{ g} = 2,7 \text{ g}$.

Ainsi la masse d'aluminium nécessaire pour le patron de la canette est égale à : $(268,42 \times 130 \times 10^{-4}) \times 2,7 \text{ g} \approx 9,4 \text{ g}$ (valeur approchée par défaut à $0,1 \text{ g}$ près).

De plus l'anneau et le rivet de liaison ont une masse de $1,4 \text{ g}$ et la soudure a une masse de $1,9 \text{ g}$.

Alors : $9,4 \text{ g} + 1,4 \text{ g} + 1,9 \text{ g} = 12,7 \text{ g}$.

La masse totale d'aluminium nécessaire pour réaliser la canette est d'environ $12,7 \text{ g}$.

Méthode 2

Pour fabriquer une canette classique, la surface de métal nécessaire est d'aire $268,42 \text{ cm}^2$.

Or : $268,42 \text{ cm}^2 = 0,026842 \text{ m}^2$.

Le volume d'aluminium nécessaire est donc :

$$0,026842 \text{ m}^2 \times 130 \mu\text{m} = 0,026842 \text{ m}^2 \times \frac{130}{1\,000\,000} \text{ m} = \frac{3,48946}{1\,000\,000} \text{ m}^3$$

La masse d'aluminium nécessaire est alors :

$$\frac{3,48946}{1\,000\,000} \text{ m}^3 \times 2700 \text{ kg/m}^3 = 0,009421542 \text{ kg} = 9,421542 \text{ g}$$

La masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une canette classique est, au dixième de gramme près $9,4$ grammes. En ajoutant la masse de l'anneau et la masse nécessaire pour souder, **il faut en tout $12,7 \text{ g}$ d'aluminium.**

Remarque

Dans l'énoncé, il est dit : « la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est $1,9 \text{ g}$ ». On peut alors s'interroger sur la possibilité de prendre en compte – ou pas – la masse d'aluminium nécessaire pour souder le fond au reste de la canette... Dans ce corrigé, nous avons fait le choix de ne pas la prendre en compte.

2) Nombre de canettes classiques pour un vélo

On sait que : $9 \text{ kg} = 9\,000 \text{ g}$.

De plus la masse d'une canette est d'environ $12,7 \text{ g}$.

Or : $9\,000 \text{ g} \div 12,7 \text{ g} \approx 708,7$ (arrondi à $0,1$ près).

On estime à 709 le nombre de canettes classiques pour fabriquer un vélo.

1) Probabilité qu'une personne choisie au hasard soit « donneur universel »

D'après le tableau 2, les donneurs universels sont les personnes du groupe O -. Or, d'après la répartition donnée dans le tableau 1, 6% de la population française se trouve dans ce groupe.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit donneur universel est donc : $\frac{6}{100} = 0,06$.

Remarque

En notant $P(\ll O - \gg)$ la probabilité de l'événement « la personne appartient au groupe O - », on peut écrire : $P(\ll O - \gg) = 0,06$.

2) Probabilité qu'une personne choisie au hasard soit « receveur universel »

De la même manière qu'à la question précédente, d'après les informations données dans les tableaux 1 et 2, les receveurs universels sont du groupe AB +, ce qui représente 3% de la population française.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit receveur universel est donc : $\frac{3}{100} = 0,03$.

Remarque

Avec les notations précédentes, on peut écrire $P(\ll AB + \gg) = 0,03$.

3) Probabilité pour qu'une personne choisie au hasard puisse donner son sang à une personne du groupe B +

Pour donner son sang à une personne du groupe B +, il faut, toujours d'après les informations données dans le tableau 2, être dans l'un des groupes suivants : B +, B -, O + ou O -.

D'après les informations données dans le tableau 1 :

- la probabilité d'appartenir au groupe B + est égale à 0,09 (puisque 9% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe B - est égale à 0,01 (puisque 1% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe O + est égale à 0,36 (puisque 36% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe O - est égale à 0,06 (voir question 1.).

De plus, il est impossible d'appartenir à deux de ces groupes à la fois. Par conséquent, la probabilité d'appartenir à l'un de ces groupes est égale à : $0,09 + 0,01 + 0,06 + 0,36 = 0,52$.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard puisse donner son sang à une personne du groupe B+ est donc 0,52.

Remarque

Avec les notations précédentes, la probabilité de pouvoir donner son sang à une personne du groupe B+ est la somme des probabilités d'appartenir aux groupes B +, B -, O + ou O -, soit :

$$P(\ll \text{donneur B +} \gg) = P(\ll B + \gg) + P(\ll B - \gg) + P(\ll O + \gg) + P(\ll O - \gg).$$

$$\text{Donc : } P(\ll \text{donneur B +} \gg) = 0,09 + 0,01 + 0,36 + 0,06 = 0,52.$$

4) Probabilité qu'une personne du groupe O soit « donneur universel »

Méthode 1

D'après le tableau 1, sur 100 personnes de la population française, 36 appartiennent au groupe O + et 6 appartiennent au groupe O -, donc 42 personnes appartiennent au groupe O.

Sur les 42 personnes de groupe O, seules 6 personnes sont du groupe O -, soit une probabilité de :

$$\frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 0,14 \text{ (arrondi au centième).}$$

La probabilité qu'une personne du groupe O soit un donneur universel est d'environ 0,14 (arrondi au centième).

Méthode 2

D'après le tableau 1, les personnes du groupe O + représentent 36% de la population française et les personnes du groupe O – représentent 6% de cette même population. Les personnes du groupe O – sont donc six fois moins nombreuses que celles du groupe O+. Par conséquent dans le groupe O, s'il y a n personnes du groupe O –, il y en aura $6n$ du groupe O +.

La probabilité qu'une personne du groupe O soit un « donneur universel » est alors égale à :

$$\frac{n}{6n + n} = \frac{1}{7} \approx 0,14.$$

Remarque

Cette question peut être traitée comme une probabilité conditionnelle notée $P_{\ll O \gg}(\ll O - \gg)$:

$$P_{\ll O \gg}(\ll O - \gg) = \frac{\text{card}(O \cap O-)}{\text{card}(O)} = \frac{6}{42}.$$

Attention ! $P_{\ll O \gg}(\ll O - \gg)$ se lit $P(\ll O - \gg)$ sachant O : c'est la probabilité d'être du groupe O – sachant que l'on appartient au groupe O.

5) Nombre de « donneurs universels » en France

D'après le tableau 1, 6% de la population française sont des « donneurs universels ».

Pour une population de donneurs de 43 217 325, cela correspond à :

$$\frac{43\,217\,325 \times 6}{100} = 2\,593\,039,5.$$

Il y a environ 2 593 039 donneurs universels en France.

Remarque

On pourrait également répondre 2 593 040 donneurs universels en France, car il s'agit d'une estimation.

6) Pourcentage de la population française susceptible de donner son sang

Selon l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes, et parmi elles 43 217 325 étaient susceptibles de donner leur sang.

On en déduit que pour 100 personnes françaises, le nombre de celles qui sont susceptibles de donner leur sang est égal à :

$$\frac{43\,217\,325 \times 100}{66\,627\,602} \approx 64,86.$$

Il y a environ 64,86% de la population (arrondi au centième) susceptible de donner son sang.

Remarque

Le détail de chaque instruction, donné ci-dessous, n'était pas attendu du candidat. Nous le présentons pour une meilleure compréhension du raisonnement.

Dans le sous-programme « Position initiale Nantes », les instructions du langage *Scratch* correspondent au positionnement du lutin « hélicoptère » au point de coordonnées $(-93 ; 30)$.



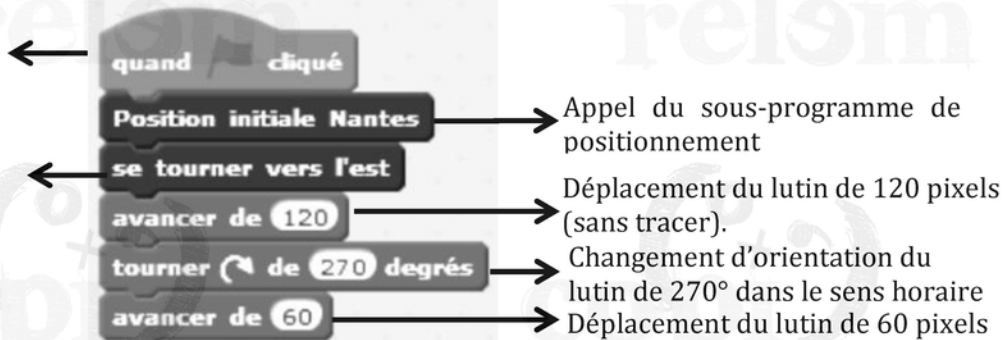
Dans le sous-programme « Se tourner vers l'est », les instructions du langage *Scratch* correspondent à l'orientation du déplacement vers la droite.



Dans le programme principal, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

Démarrage du programme

Appel du sous-programme de direction



Nombres à remplacer

Pour aller de Nantes à Paris, le lutin avance de deux cases (ce qui correspond à l'instruction « avancer de 120 » dans le script *Scratch*), puis il tourne vers sa droite de 270°, et avance encore d'une case (ce qui correspond à l'instruction « avancer de 60 »). On en déduit que la longueur d'une case représente 60 pixels. Pour que l'hélicoptère avance horizontalement (vers la droite) de 3 cases, « 120 » doit être remplacé par « 180 ».

Pour que l'hélicoptère pivote (dans le sens horaire) de 90 degré vers la droite, « 270 » doit être remplacé par « 90 ».

« 60 » reste ainsi, l'hélicoptère atteint alors Lyon (il avance verticalement de deux cases vers le bas).

En conclusion, les nombres « 120 » et « 270 » doivent être remplacés par les nombres « 180 » et « 90 », le nombre « 60 » reste inchangé.

1) Calcul mental de 45^2

45 est composé de 4 dizaines et de 5 unités, son carré s'obtient :

- en calculant $4 \times 5 = 20$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- puis en écrivant 25 à la droite de 20 pour obtenir le résultat.

Soit $45^2 = 2025$.

2) Relation $n^2 = 100d(d + 1) + 25$

Le nombre entier n peut s'écrire sous la forme : $n = 10d + 5$.

Alors : $n^2 = (10d + 5)^2$.

Ce qui donne après développement : $n^2 = 100d^2 + 2 \times 5 \times 10d + 5^2$.

Soit : $n^2 = 100d^2 + 100d + 25$.

Ou encore : $n^2 = 100d \times d + 100d \times 1 + 25$.

En mettant $100d$ en facteur, on obtient l'égalité :

$$n^2 = 100d(d + 1) + 25.$$

3) Explication de la relation précédente

Le produit $d(d + 1)$ correspond à la première étape du calcul du carré, soit le produit du nombre de dizaines d par son successeur $(d + 1)$.

Le nombre obtenu étant multiplié par 100, il représente un nombre de centaines.

Puis on écrit 25 à droite, ce qui revient bien à ajouter 25 unités aux $d(d + 1)$ centaines.

4) Calcul mental de $3,5^2$ *Méthode 1*

On peut écrire 3,5 sous la forme 35×10^{-1} .

Donc : $3,5^2 = (35 \times 10^{-1})^2 = 35^2 \times 10^{-2}$.

Pour calculer le carré de 35, on applique la technique de calcul mental : $35^2 = 100 \times 3 \times 4 + 25$.

Soit $35^2 = 1225$.

Donc : $3,5^2 = 1225 \times 10^{-2} = \mathbf{12,25}$.

Méthode 2

On peut écrire 3,5 sous la forme $35 \times 0,1$.

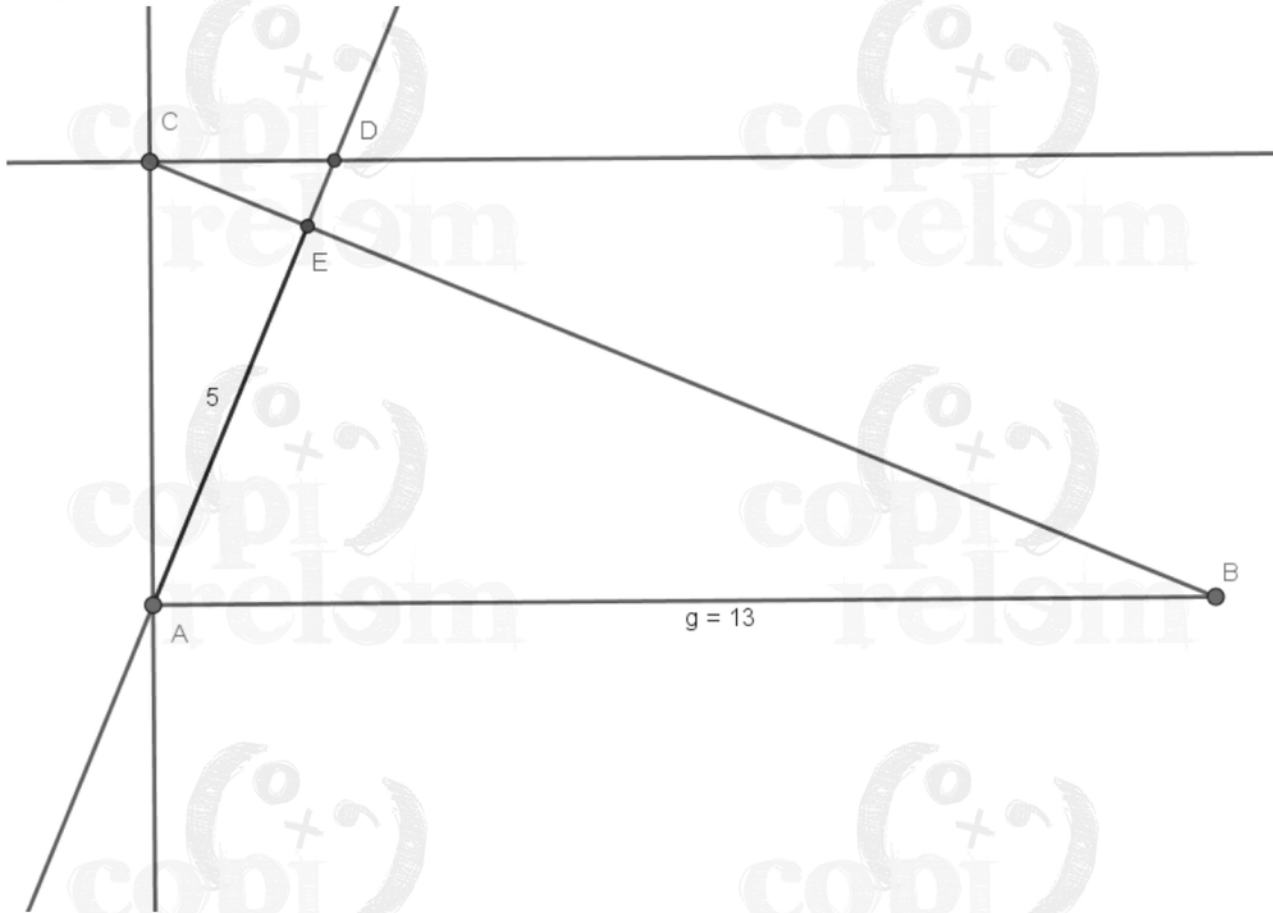
Donc : $3,5^2 = (35 \times 0,1)^2 = 35^2 \times 0,01 = 1225 \times 0,01 = \mathbf{12,25}$.

Méthode 3

On peut écrire 3,5 sous la forme $\frac{35}{10}$.

Donc : $3,5^2 = \left(\frac{35}{10}\right)^2 = \frac{35^2}{10^2} = \frac{1225}{100} = \mathbf{12,25}$.

1) Figure en vraie grandeur.



2) Aire du triangle CEA

Dans cette question, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm.

Méthode 1 : par calcul sur les longueurs

Pour calculer l'aire du triangle ACE en utilisant la formule de l'aire d'un triangle, il suffit de connaître AE et EC. Nous savons déjà que $AE = 5$.

Puisque C, E et B sont alignés : $EC = BC - BE$.

Calcul de BE

Le triangle AEB est rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 = AE^2 + BE^2$.

D'où : $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

Donc $BE = 12$.

Calcul de BC

Dans le triangle rectangle ABC on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

Dans le triangle rectangle AEB on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BE}{BA} = \frac{12}{13}$.

On en déduit que : $\frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.

Ainsi : $BC = \frac{13 \times AB}{12}$.

Donc : $BC = \frac{13^2}{12}$.

Calcul de EC

$EC = BC - BE = \frac{13^2}{12} - 12$.

Calcul de l'aire de ACE

Aire ACE = $\frac{1}{2} \times \left(\frac{13^2}{12} - 12 \right) \times 5 \text{ cm}^2 \approx 5,20833 \text{ cm}^2$.

Or : $5,20833 \text{ cm}^2 = 520,833 \text{ mm}^2$.

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 2 : par calcul sur les aires

On peut trouver l'aire de ACE par différence : Aire ACE = Aire ABC - Aire ABE.

Pour calculer les aires de ces deux triangles, on doit par calculer BE et BC.

Calcul de BE

Le triangle AEB est rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 = AE^2 + BE^2$.

D'où : $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

Donc $BE = 12$.

On en déduit l'aire du triangle ABE : aire ABE = $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.

Calcul de BC

Dans le triangle rectangle ABC on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

Dans le triangle rectangle AEB on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BE}{BA} = \frac{12}{13}$.

On en déduit que : $\frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.

Ainsi : $BC = \frac{13 \times AB}{12}$.

Donc : $BC = \frac{13^2}{12}$.

On en déduit l'aire de ABC : Aire ABC = $\frac{BC \times AE}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\frac{13^2}{12} \times 5}{2} \text{ cm}^2$.

Calcul de l'aire de ACE

Aire ACE = aire ABC - aire ABE.

$$\text{Donc Aire ACE} = \frac{13^2}{2} \times 5 \text{ cm}^2 - 30 \text{ cm}^2 \approx 5,20833 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Or : } 5,20833 \text{ cm}^2 = 520,833 \text{ mm}^2.$$

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 3 : identification de triangles semblables

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AC). Les angles alternes-internes $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux. Notons α la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAE}$.

On a : $\widehat{BAE} = \widehat{ADC} = \alpha$.

Le triangle AEB est rectangle en E, donc : $\widehat{ABE} + 90 + \alpha = 180$.

Ainsi : $\widehat{ABE} = 90 - \alpha$.

Le triangle CED est rectangle en E donc : $\widehat{ECD} = 90 - \alpha$.

Le triangle AEC est rectangle en E, donc : $\widehat{ECA} + \widehat{CAE} + 90 = 180$.

Or $\widehat{CAE} = 90 - \alpha$, donc on a : $\widehat{ECA} = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.

Les triangles AEB et AEC ont leurs angles égaux à 90° , α et $(90 - \alpha)$. Ils sont donc semblables et les longueurs de leurs côtés sont donc proportionnelles.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEB rectangle en E, on a :

$$EB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144. \text{ On a donc : } EB = 12.$$

On a alors le tableau de proportionnalité suivant :

Côtés de AEB	AB = 13	AE = 5	EB = 12
Côtés de CEA	AC	CE	AE = 5

$$\text{On peut ainsi calculer CE : } CE = \frac{5 \times 5}{12} = \frac{25}{12}.$$

$$\text{On peut alors calculer l'aire du triangle CEA : } \frac{CE \times EA}{2} = \frac{\frac{25}{12} \times 5}{2} = \frac{125}{24} \approx 5,20833.$$

$$\text{Or : } 5,20833 \text{ cm}^2 = 520,833 \text{ mm}^2.$$

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 3 bis :

En reprenant la méthode 2, il suffit de démontrer que les triangles ABE et AEC sont semblables pour trouver le coefficient de dilatation (agrandissement/réduction) entre ces deux triangles : AE est à AEC ce que EB est à AEB.

Ainsi le coefficient de dilatation est $\frac{5}{12}$.

Or on sait que si les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 .

L'aire du triangle AEC est donc : Aire AEC = $\left(\frac{5}{12}\right)^2 \times$ Aire ABE.

On peut calculer l'aire du triangle ABE : Aire ABE = $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.

On en déduit : Aire ACE = $\left(\frac{5}{12}\right)^2 \times 30 \text{ cm}^2 \approx 5,20833 \text{ cm}^2$.

$$\text{Or : } 5,20833 \text{ cm}^2 = 520,833 \text{ mm}^2.$$

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).