

A - Lecture des informations sur un pneumatique

1) Étude d'un pneumatique dont la cote est « 195/65 R15 68V »

a) Diamètre de la jante de ce pneumatique

La mesure en pouce du diamètre de la jante de ce pneumatique est donnée par le nombre qui suit la lettre R de sa cote.

Le diamètre de la jante vaut 15 pouces.

1 pouce = 2,54 cm donc 15 pouces = $15 \times 2,54 \text{ cm} = 38,1 \text{ cm}$.

Le diamètre de la jante de ce pneumatique vaut 38,1 cm.

b) Hauteur de ce pneumatique

La mesure en millimètres de la largeur de ce pneumatique est donnée par le premier nombre de sa cote. La largeur est donc égale à 195 mm soit 19,5 cm.

Le deuxième nombre de la cote de ce pneu indique que la hauteur de ce pneu vaut 65% de sa largeur.

$$\frac{65}{100} \times 19,5 \text{ cm} = 0,65 \times 19,5 \text{ cm} = 12,675 \text{ cm}.$$

La hauteur de ce pneumatique vaut donc bien 12,675 cm.

c) Diamètre total de la roue

Pour calculer le diamètre total de cette roue, on doit prendre en compte le diamètre de la jante auquel on ajoute deux fois la hauteur du pneumatique.

$$38,1 \text{ cm} + 2 \times 12,675 \text{ cm} = 63,45 \text{ cm}.$$

Le diamètre total de la roue vaut 63,45 cm.

2) Cote d'un pneu radial selon les informations données

Calcul du premier nombre de la cote : la mesure de la largeur en mm

La largeur de ce pneu est égale à 20,5 cm soit 205 mm donc le premier nombre de sa cote est **205**.

Calcul du deuxième nombre de la cote : le pourcentage de la hauteur par rapport à la largeur

Calculons d'abord la hauteur du pneumatique :

$$\frac{63,19 \text{ cm} - 40,64 \text{ cm}}{2} = 11,275 \text{ cm}.$$

Passons ensuite au calcul du pourcentage demandé.

Méthode 1 : calcul du rapport entre la hauteur et la largeur

$$\frac{11,275}{20,5} = 0,55 = 55\%$$

Le deuxième nombre de la cote de ce pneu est **55**.

Méthode 2 : utilisation d'un tableau de proportionnalité

Recherchons le nombre manquant dans le tableau suivant, où il y a proportionnalité entre d'une part des mesures de longueurs et d'autre part le pourcentage de ces mesures de longueurs par rapport à la mesure de la largeur (toutes les mesures étant exprimées en cm).

	Largeur	Hauteur
Mesure en cm	20,5	11,275
Pourcentage	100	

On peut par exemple utiliser un produit en croix pour déterminer la valeur manquante :

$$\frac{11,275 \times 100}{20,5} = 55$$

Le deuxième nombre de la cote de ce pneu est **55**.

Calcul du nombre qui suit la lettre R de la cote : diamètre en pouces de la jante

La hauteur de la jante de ce pneu est égale à 40,64 cm et un pouce est égal à 2,54 cm.

Or $\frac{40,64 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm}} = 16$ donc $40,64 \text{ cm} = 16 \times 2,54 \text{ cm} = 16 \text{ pouces}$.

Le nombre qui suit la lettre R de la cote de ce pneu est **16**.

Recherche des indices de poids et de vitesse.

La lecture du tableau 1 nous indique que l'indice de poids correspondant à 412 kg est **77**.

La lecture du tableau 2 nous permet de trouver l'indice correspondant à la vitesse 270 km/h : la lettre **W**.

Finalement, la cote de ce pneu radial est « 205/55 R16 77W »

B - Distance d'arrêt

1) Distance d'arrêt à 90km/h sur route mouillée pour un conducteur vigilant

Conversion de la vitesse 90 km/h en m/s

Méthode 1

$$90 \text{ km/h} = \frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s.}$$

Méthode 2

Dans cette méthode, on modélise le mouvement de la voiture, dont on connaît seulement la vitesse à l'instant du freinage, comme un mouvement (virtuel) à vitesse constante.

Une vitesse de 90 km/h signifie que si la voiture roulait pendant une heure elle parcourrait 90 km soit 90 000 m. Une heure contient 3 600 secondes (60 minutes par heure et 60 secondes par minute) donc , à la même vitesse, en 1s la voiture parcourrait 3600 fois moins de distance.

$$\frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600} = 25 \text{ m.}$$

La vitesse au moment du freinage est donc égale à 25 m/s.

Remarque

La lecture du nombre entre parenthèses sous 90 dans le diagramme de la question 3 nous permet de vérifier ce résultat.

Calcul final de la distance d'arrêt par application de la formule $d_A = V \times t_R + kV^2$

$V = 25 \text{ m/s}$, $t_R = 0,75\text{s}$ et $k = 0,14$ car la route est mouillée.

$$25 \times 0,75 + 0,14 \times 25^2 = 106,25.$$

La distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 90 km/h sur route mouillée est de 106,25 m.

Remarque

En toute rigueur, il faudrait écrire $k = 0,14 \text{ s}^2/\text{m}$, mais l'énoncé a négligé cette précision.

2) Proportionnalité ou non de la distance d'arrêt sur route sèche par rapport à la vitesse pour un conducteur vigilant

Dans le cas d'une route sèche ($k = 0,073$) pour un conducteur vigilant ($t_R = 0,75$), la distance d'arrêt est donnée par :

$$d_A = V \times t_R + kV^2 = 0,75V + 0,073V^2.$$

Méthode 1 : recherche de valeurs pour contredire la propriété multiplicative de linéarité

Calculons la distance d'arrêt pour une vitesse de 20 m/s (soit 72 km/h, pour indication car il n'était pas nécessaire de faire cette conversion pour répondre à la question).

$$0,75 \times 20 + 0,073 \times 20^2 = 44,2.$$

On obtient ainsi une distance d'arrêt égale à 44,2 m pour une vitesse initiale égale à 20 m/s.

Si la distance d'arrêt était proportionnelle à la vitesse, pour un véhicule allant deux fois plus vite, donc à 40 m/s, la distance d'arrêt serait également doublée, et serait égale à 88,4 m ($44,2 \times 2$).

Or pour 40 m/s, la formule donne : $0,75 \times 40 + 0,073 \times 40^2 = 146,8$, soit une distance d'arrêt égale à 146,8 m.

La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Méthode 2 : recherche de valeurs pour contredire l'égalité des « produits en croix »

En reprenant les valeurs calculées ci-dessus (ou d'autres), on peut organiser ces données en les présentant dans un tableau.

Vitesse en m/s	20	40
Distance d'arrêt en m	44,2	146,8

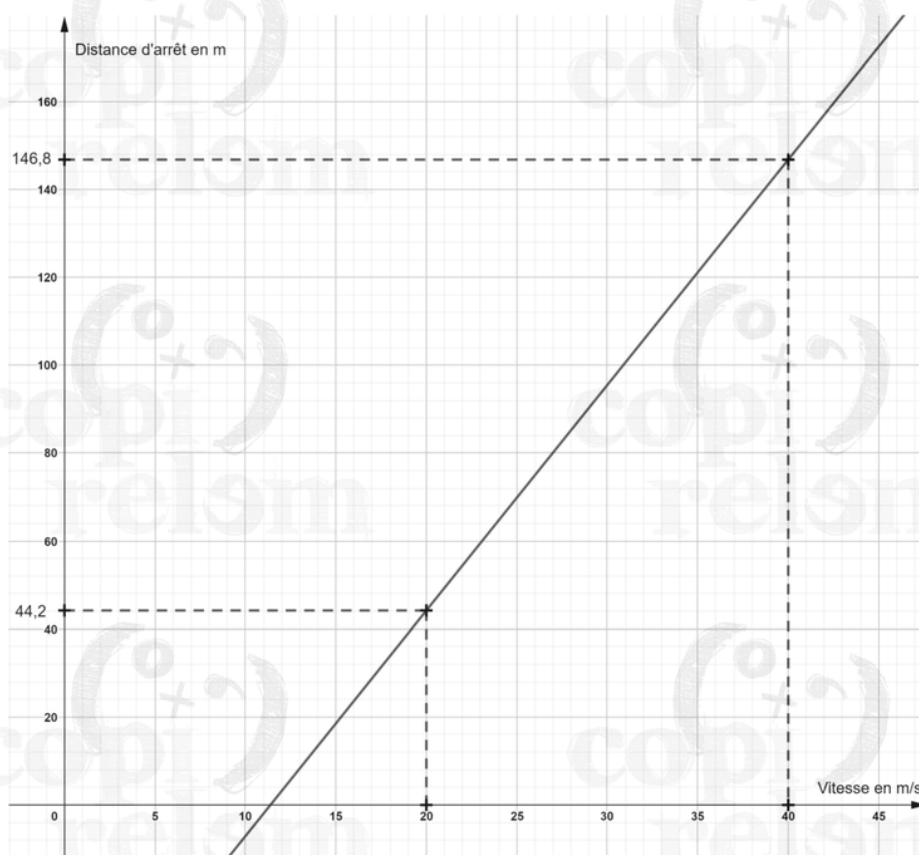
Si ce tableau était un tableau de proportionnalité, alors les « produits en croix » seraient égaux.

Or ce n'est pas le cas, car $20 \times 146,8 = 2936$ et $40 \times 44,2 = 1768$.

La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Méthode 3 : recherche de valeurs pour étudier la représentation graphique de d_A

En reprenant les valeurs calculées ci-dessus (ou d'autres), on peut placer dans un repère orthogonal les points de coordonnées (20 ; 44,2) et (40 ; 146,8).



Si la distance d'arrêt était proportionnelle à la vitesse, alors ces points seraient alignés avec l'origine du repère. Le graphique ci-dessus montre que ce n'est pas le cas. La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Remarque

Dans aucune des trois méthodes précédentes, on ne pouvait utiliser comme valeurs numériques les données du diagramme de la question 3 car il n'y est pas précisé que le conducteur est vigilant. On constate en effet, pour une vitesse de 50 m/s par exemple, que la distance d'arrêt sur le diagramme est de 245,5 m alors qu'en utilisant la formule pour un conducteur vigilant on obtient une distance d'arrêt de 220 m :

$$0,75 \times 50 + 0,073 \times 50^2 = 220.$$
Méthode 4 : étude de la linéarité de la fonction qui associe la distance d'arrêt à la vitesse

La formule $d_A = 0,75V + 0,073V^2$ peut être interprétée de la manière suivante : la distance d'arrêt est fonction de la vitesse, et cette relation peut être représentée par la notation fonctionnelle suivante : quelle que soit la vitesse V , $d_A(V) = 0,75V + 0,073V^2$.

Étudier la proportionnalité de la distance d'arrêt d'un véhicule par rapport à sa vitesse revient à étudier la linéarité de la fonction qui à un nombre V associe le nombre $0,75V + 0,073V^2$.

Cette fonction est la somme :

- d'une fonction linéaire (la fonction qui à V associe $0,75V$ est la fonction linéaire de coefficient 0,5) ;
- d'une fonction qui n'est pas linéaire (la fonction qui à V associe $0,073V^2$ est une fonction du second degré).

Elle n'est donc pas linéaire.

On en conclut que la distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse initiale.

3) Lecture de diagramme

Nous repérons sur le graphique de la page ci-contre les éléments qui ont permis de répondre aux questions posées.

a) Distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 110 km/h

Elle est égale à **101 m**.

b) Distance parcourue pendant le freinage d'un véhicule roulant à 80 km/h

La distance parcourue pendant le freinage est la différence entre la distance d'arrêt et la distance parcourue pendant le temps de réaction soit : $57,7 \text{ m} - 16,7 \text{ m} = \mathbf{41 \text{ m}}$.

c) Temps mis par un véhicule roulant à 130 km/h pour s'arrêter

Cette durée est égale à **6,76 s**.

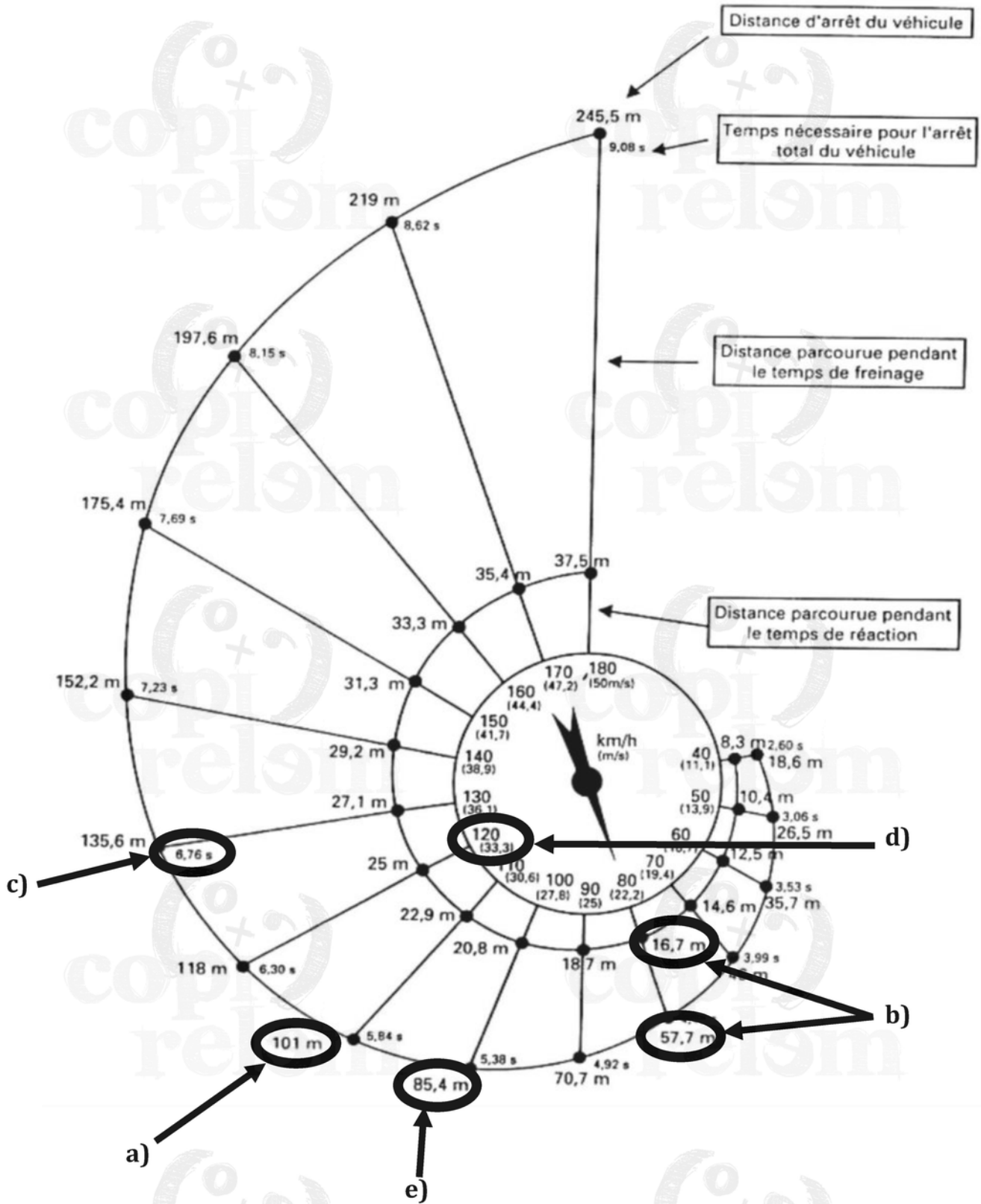
d) Vitesse d'un véhicule dont la distance de réaction est de 25 m

Cette vitesse est égale à **120 km/h**.

e) Un conducteur roulant à 27,8 m/s s'arrêtera-t-il avant un obstacle aperçu à 100 m ?

La lecture du diagramme nous donne une distance d'arrêt de 85,4 m pour une vitesse de 27,8 m/s. Elle est inférieure à 100 m.

Oui, un conducteur roulant à 27,8 m/s, apercevant un obstacle à 100 m, pourra s'arrêter à temps.



C - Au cinéma

1) Circonférence en cm d'une roue de 54 cm de diamètre arrondie au millimètre près

Utilisons la formule du périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre :

$$\text{périmètre d'un cercle} = \pi \times \text{diamètre de ce cercle}$$

Le diamètre de la roue étant égal à 54 cm, nous obtenons une circonférence égale à 54π cm.

Un arrondi au millimètre près de cette longueur est 169,6 cm ou 169,7 cm.

La circonférence de cette roue, arrondie au millimètre près, est de 169,6 cm ou 169,7 cm.

Remarque

Il existe trois manières d'arrondir : au plus proche, par excès ou par défaut. Quand cela n'est pas imposé par l'énoncé, nous conseillons de choisir l'arrondi au plus proche, même si ce n'est pas obligatoire.

À ce propos, on pourra consulter le document ressource publié sur Eduscol, intitulé Nombres, mesures et incertitudes, disponible au lien suivant (consulté en mai 2018) :

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/PC/88/7/Nombres_mesures_et_incertitudes_222887.pdf

2) Tours de roue d'une voiture qui roule à 110 km/h

a) Nombre de tours par seconde de la roue

Calculons la distance parcourue par la roue en une seconde à 110 km/h.

En 1 h = 3600 s, la roue parcourrait à cette vitesse 110 km,

donc en 1 seconde elle parcourt $\frac{110}{3600}$ km, soit environ 0,030556 km c'est à dire 3 055,6 cm, au mm près.

Calculons ensuite le nombre de tours fait par la roue en une seconde.

On vient de voir qu'en une seconde, la roue parcourt environ 3 055,6 cm.

On sait par ailleurs (d'après la question 1), qu'en un tour, la roue parcourt environ 169,6 cm.

Une division permet d'en déduire le nombre de tours effectués en une seconde (on cherche combien de fois il y a 169,6 cm dans 3 055,6 cm) :

$$3\,055,6 \text{ cm} = 18 \times 169,6 \text{ cm} + 2,8 \text{ cm}.$$

En une seconde, la roue fait environ 18 tours.

Remarque

En toute rigueur, il faudrait effectuer les calculs précédents en conservant les valeurs exactes.

On obtient alors : $\frac{\frac{11\,000\,000}{3\,600} \text{ cm}}{54\pi \text{ cm}} \approx 18,01$ au centième de tour près.

b) Nombre de tours de roue entre deux images

Remarque

« La caméra a une vitesse de défilement de 24 images par seconde » signifie qu'elle prend une photographie toutes les $\frac{1}{24}$ s. Ainsi, déterminer le nombre de tours fait par un pneu de la voiture « entre deux images » revient à chercher le nombre de tours faits par un pneu de la voiture pendant la durée qui s'écoule entre deux prises de photographies successives par la caméra, c'est-à-dire en $\frac{1}{24}$ s.

Pendant la durée d'affichage d'une image, c'est-à-dire pendant $\frac{1}{24}$ s, la roue fait 24 fois moins de tours que pendant une seconde.

En reprenant la valeur approchée calculée en a), on calcule et on obtient $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ ou 0,75.

Entre deux images, la roue fait environ trois-quarts de tour ou 0,75 tours.

Remarque

Comme pour la remarque de a), en ne prenant que des valeurs exactes, on obtient :

$$\frac{\frac{11\,000\,000}{3\,600}}{54\pi} \times \frac{1}{24} \approx 0,75 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

3) Vitesse pour laquelle on a l'impression que les roues ne tournent pas

Pour qu'un observateur ait l'impression, en regardant le film, que les roues ne tournent pas, il faut qu'à chaque photographie prise par la caméra, la roue soit dans une position où on ne remarque pas qu'elle a tourné. C'est en particulier le cas si la roue fait un nombre entier de tours complets entre chaque prise.

Remarque

D'après la question précédente, une vitesse égale à 110 km/h ne suffit pas, car on a vu qu'entre deux images, la roue fait environ trois quarts de tour. La vitesse cherchée est donc supérieure à 110 km/h.

La vitesse la plus faible permettant de remplir cette condition est celle qui permet à la roue de faire un tour complet en exactement $\frac{1}{24}$ s : cette vitesse est égale à 24 tours/s.

Exprimons-la en km/h.

1 h = 3600 s, donc 24 tours/s = 24×3600 tours/h = 86 400 tours/h.

On a vu plus haut qu'en un tour la roue fait environ 169,6 cm (au mm près).

Or $86\,400 \times 169,6 \text{ cm} = 14\,653\,440 \text{ cm} = 146\,535 \text{ m} = 146,535 \text{ km}$.

La voiture a alors une vitesse d'environ 146,5 km/h.

À la vitesse de 146,5 km/h (et pour tous ses multiples), on a l'impression que les roues ne tournent pas.

Remarque

En effectuant les calculs à partir de la valeur exacte de la mesure en cm de la circonférence de la roue, on obtient $86\,400 \times 54\pi \text{ cm/h} \approx 14\,657\,415 \text{ cm/h}$, soit 14 6,6 km/h à 0,1 km/h près.

Remarque

Si on suppose maintenant que les marquages du pneu (notamment les informations sur lesquelles portaient la partie A ne sont pas visibles, que la roue n'a aucun défaut, que la valve n'est pas visible et que les cinq branches sont rigoureusement identiques), le problème peut être modélisé par la recherche des rotations qui laissent invariante la figure ci-dessous :



C'est le cas des rotations qui ont pour centre, le centre du cercle, et pour angle, un multiple de $\frac{360}{5}$ degrés.

Pour la roue, cela signifie qu'après $\frac{1}{5}$ de tour (ou un de ses multiples) l'image de la roue sera identique à la précédente. La vitesse minimale permettant de remplir cette condition est $\frac{1}{5}$ tour en $\frac{1}{24}$ s, soit $\frac{24}{5}$ tours par seconde.

Cette vitesse est égale à $360 \times \frac{24}{5}$ tours par heure, soit 17 280 tours par heure, soit environ $17\,280 \times 169,6 \text{ cm}$ par heure. On obtient alors environ 29,3 km/h.

Tous les multiples de cette vitesse répondent à la question.

1) Volume du silo en m^3 arrondi au centième

Soit V le volume du silo. Il peut être calculé en faisant la somme du volume du cylindre et de celui du cône.

$$V = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{cône}}$$

$$V = \pi AB^2 \times AD + \frac{1}{3}(\pi AB^2 \times AS)$$

$$V = \pi \times (1,30 \text{ m})^2 \times 2,40 \text{ m} + \frac{1}{3}(\pi \times (1,30 \text{ m})^2 \times 1,60 \text{ m})$$

$$V \approx 15,57 \text{ m}^3 \text{ au centième de } m^3 \text{ près.}$$

Le volume du silo est d'environ $15,57 \text{ m}^3$ arrondi au centième de M^3 le plus proche.

2) Farine pour nourrir 48 vaches pendant 90 jours

48 vaches mangent chaque jour : $48 \times 3 \text{ L} = 144 \text{ L} = 0,144 \text{ m}^3$,
soit 90 fois plus pour 90 jours : $90 \times 0,144 \text{ m}^3 = 12,96 \text{ m}^3$.

$\frac{6}{7}$ du volume total du silo valent environ : $\frac{6}{7} \times 15,57 \text{ m}^3 \approx 13,35 \text{ m}^3$ ce qui est supérieur à $12,96 \text{ m}^3$.

L'éleveur aura assez de farine pour nourrir ses 48 vaches pendant 90 jours.

Remarque

L'erreur d'arrondi de la question 1) est inférieure à un centième de m^3 . Multipliée par $\frac{6}{7}$, elle reste inférieure à un centième de m^3 , ce qui garantit la validité de la comparaison.

3) Parallélisme des deux échelles

D'après la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle HCN coupé par (BM), il suffit de vérifier les trois conditions

1) H, M, N sont alignés dans cet ordre,

2) H, B, C sont alignés dans cet ordre,

$$3) \frac{HM}{HN} = \frac{HB}{HC}$$

pour prouver que (CN) et (BM) sont parallèles.

1) et 2) sont vérifiés par hypothèse.

Pour l'ordre il s'agit d'un contrôle visuel sur la figure en l'absence d'un énoncé plus précis.

Vérifions 3).

Montrons tout d'abord que $SH = AB$ et que $SA = HB$.

Le cône étant un cône de révolution, c'est un cône droit, donc son axe de révolution (SA) est perpendiculaire à sa base. Ainsi l'angle $\widehat{SAB}$ est droit.

On suppose que A, B, H, S sont dans un même plan (celui de la figure). Par conséquent le quadrilatère ABHS a trois angles droits- en H et S (par hypothèses) et en A (d'après ce qui précède)- donc ABHS est un rectangle. Comme les côtés opposés d'un rectangle ont même longueur,

$$SH = AB = 1,30 \text{ m} \text{ et } HB = SA = 1,60 \text{ m.}$$

Calcul de HM, HN et HC

$$HM = SM - SH = 2,1 \text{ m} - 1,30 \text{ m} = 0,80 \text{ m.}$$

$$HN = SN - SH = 3,3 \text{ m} - 1,30 \text{ m} = 2 \text{ m.}$$

Il nous reste à calculer HC. Pour cela montrons que SDCH est un rectangle.

SDCH est un quadrilatère avec deux angles droits en S et en H (par hypothèses) et il a un angle droit en D - car (AD) est l'axe de révolution du cylindre et car S, A et D sont alignés. SDCH est donc un rectangle : ses côtés opposés ont même longueur, donc $HC = SD$.

$$\text{Ainsi : } HC = SD = SA + AD = 1,60 \text{ m} + 2,40 \text{ m} = 4 \text{ m.}$$

Calcul des rapports de la condition 3)

$$\frac{HM}{HN} = \frac{0,80}{2} = 0,4 \text{ et } \frac{HB}{HC} = \frac{1,60}{4} = 0,4.$$

Les trois conditions de la réciproque du théorème de Thalès sont vérifiées ; nous pouvons en déduire que **les échelles sont bien parallèles.**

Remarque

Pour cette question, une validation visuelle ou instrumentée n'était pas suffisante.

Une des difficultés de la géométrie est qu'il faut distinguer ce que l'on voit sur le dessin que l'on valide visuellement (géométrie perceptive) et qui est intéressant pour avoir des idées (intérêt heuristique) de ce que l'on déduit des propriétés de la figure par un raisonnement déductif (géométrie des propriétés).

Il est souvent délicat d'établir des propriétés de la géométrie de l'ordre (à droite/à gauche ; au-dessus/au-dessous ; avant/après) et l'on se contente souvent, au collège, d'une validation visuelle parce qu'une validation déductive serait trop difficile à ce niveau. On pourra lire avec intérêt les documents ressources suivants :

Parzysz, Bernard. (2003). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Carnets de route de la Copirelem, Concertum, tome 2, éditeur ARPEME, Paris.

Eduscol (2016) Compétences travaillées en mathématiques : raisonner.

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf (consulté en mai 2018)

1) Probabilité de gagner une télévision

On suppose que chaque billet a la même probabilité d'être vendu (impartialité du vendeur par rapport à l'acheteur). Autrement dit, on suppose l'équiprobabilité de la vente des billets.

Dans ces conditions, la probabilité de gagner une télévision est égale à la proportion de billets permettant de gagner une télévision parmi l'ensemble des billets vendus.

Ici deux billets permettent de gagner une télévision et 300 billets sont vendus au total.

Donc la probabilité de gagner une télévision est égale à $\frac{2}{300}$ ou $\frac{1}{150}$.

Remarque

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. L'expression courante « 1 chance sur 150 » qui ne répond pas à ce critère n'est donc pas correcte. Cela reste valable pour la question 2).

2) Probabilité de gagner un bon de réduction

De la même manière, 15 billets ($10 + 5$) permettent de gagner un bon de réduction,

donc la probabilité de gagner un bon de réduction est égale $\frac{15}{300}$.

On peut aussi exprimer cette réponse avec les écritures suivantes :

$\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou **0,05** ou **5%** ou toutes fractions égales à $\frac{1}{20}$.

Remarque

L'écriture décimale, les écritures fractionnaires et l'écriture sous forme de pourcentage peuvent être proposées indifféremment car les valeurs sont exactes. Ce n'était pas le cas à la question 1.

Nous en profitons pour rappeler que toute valeur approchée doit être accompagnée de sa précision. Pour la question 1, si on veut donner la probabilité sous la forme d'une écriture décimale, il faut par exemple indiquer 0,006 au millième près.

3) Rentabilité de la loterie

a) Prix à fixer par l'organisateur pour ne pas perdre d'argent

Remarque

On suppose que l'organisateur vend tous les billets et qu'ils sont tous au même prix.

Par ailleurs, on suppose que la question porte sur le prix de vente minimum de chaque billet. En effet, un prix de vente du billet fixé à 1000€ est une réponse correcte à la question posée : il ne perdrait pas d'argent s'il les vendait tous...même si la vente de tous les billets est peu probable.

Calcul de la dépense globale

L'organisateur dépense :

- 2 téléviseurs à 500 € soit 1000 €,
- 5 bons de réduction à 100 € soit 500 €,
- 10 bons de réduction à 50 € soit 500 €,
- 20 porte-clés à 0,50 € soit 10 €.

Ceci constitue une dépense totale égale à $1000 \text{ €} + 500 \text{ €} + 500 \text{ €} + 10 \text{ €}$, soit 2010 €.

Calcul du prix minimum d'un billet

Pour ne pas perdre d'argent, la recette de la vente de 300 billets doit équilibrer la dépense de 2010 €.

$$2010 \text{ €} : 300 = 6,70 \text{ €}.$$

Pour ne pas perdre d'argent l'organisateur doit vendre le billet au moins 6,70 €.

b) Nombre de billets perdants à rajouter pour ne pas perdre d'argent avec des billets à 2 €

Avec un prix de 2 € pour chaque billet, la vente des 300 premiers billets rapporte $300 \times 2 \text{ €}$ soit 600 €.

Pour ne pas perdre d'argent, la recette des billets rajoutés doit être de $2010 \text{ €} - 600 \text{ €}$ soit 1410 €.

$$\text{Or } 1410 \text{ €} : 2 \text{ €} = 705.$$

L'organisateur doit donc rajouter 705 billets perdants aux 300 premiers billets.

Remarque

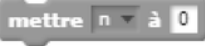
La question est ambiguë quant au terme « rajouter », car il n'est pas précisé explicitement à quel ensemble on cherche à rajouter des billets. Si on rajoute par rapport à la situation initiale des 300 billets, il faut rajouter 705 billets perdants. Si on rajoute par rapport aux 27 billets gagnants, il faut rajouter 978 billets perdants ($705 + 300 - 27$).

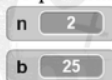
Lorsque le candidat est confronté à un énoncé ambigu, il a intérêt à signaler différentes interprétations qu'il envisage et à en choisir une. Dans tous les cas il ne doit pas s'emporter dans sa copie contre l'ambiguïté éventuelle de l'énoncé.

Remarque

Il nous a paru important de justifier au tout début l'hypothèse d'équiprobabilité. En effet cette hypothèse est trop souvent naturalisée. Le lecteur intéressé pourra se reporter à la référence suivante : Gauvrit Nicolas (2013) A propos du "biais d'équiprobabilité". Recherches en didactiques des mathématiques. Vol.33, n°2 pp. 163-182. La pensée sauvage. Grenoble.

Complément de formation : aide à la compréhension du programme fourni, écrit en Scratch, un langage de programmation par blocs.

Reformulation des instructions en langage naturel		Ce que fait le programme	Valeurs des variables
L'exécution du programme est déclenchée par l'évènement « l'utilisateur clique sur le drapeau vert ».			
Initialisation des valeurs de plusieurs variables.		Le nombre 5 est affecté à la variable a .	$a = 5$
		Le nombre 0 est affecté à la variable n .	$a = 5$ $n = 0$
		Le nombre 1 est affecté à la variable b .	$a = 5$ $n = 0$ $b = 1$
Exécution 10 fois de suite de la séquence d'instructions qui se trouvent à l'intérieur de cette boucle .			$a = 5$ $n = 0$ $b = 1$
Première exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la variable n .		Le programme calcule $0 + 1 = 1$. n prend la valeur 1.	$a = 5$ $n = 1$ $b = 1$
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la variable b .		Le programme calcule $1 \times 5 = 5$. b prend la valeur 5.	$a = 5$ $n = 1$ $b = 5$
Affichage de la valeur de la variable b et de celle de la variable n pendant 3 secondes .		Le programme affiche pendant 3 s  	$a = 5$ $n = 1$ $b = 5$
Deuxième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la variable n .		Le programme calcule $1 + 1 = 2$. n prend la valeur 2.	$a = 5$ $n = 2$ $b = 5$
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la variable b .		Le programme calcule $5 \times 5 = 25$. b prend la valeur 25.	$a = 5$ $n = 2$ $b = 25$

Affichage de la valeur de la variable b et de celle de la variable n pendant 3 secondes.		Le programme affiche pendant 3 s 	$a = 5$ $n = 2$ $b = 25$
Troisième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la variable n .		Le programme calcule $2 + 1 = 3$. n prend la valeur 3.	$a = 5$ $n = 3$ $b = 25$
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la variable b .		Le programme calcule $25 \times 5 = 125$. b prend la valeur 125.	$a = 5$ $n = 3$ $b = 125$
Affichage de la valeur de la variable b et de celle de la variable n pendant 3 secondes.		Le programme affiche pendant 3 s 	$a = 5$ $n = 3$ $b = 125$
Quatrième, ..., neuvième exécutions du contenu de la boucle			
Dixième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la variable n .		Le programme calcule $9 + 1 = 10$. n prend la valeur 10.	$a = 5$ $n = 10$ $b = 1\,953\,125$
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la variable b .		Le programme calcule $1\,953\,125 \times 5 = 9\,765\,625$. b prend la valeur 9 765 625.	$a = 5$ $n = 10$ $b = 9\,765\,625$
Affichage de la valeur de la variable b et de celle de la variable n pendant 3 secondes.		Le programme affiche pendant 3 s 	$a = 5$ $n = 10$ $b = 9\,765\,625$

Remarque :

Le programme étant terminé, l'affichage des valeurs de n et de b perdure au-delà de 3 secondes.

1) Valeurs des variables a , b et n à la fin du premier puis du second passage

	Initialisation	A la fin du 1 ^{er} passage dans la boucle	A la fin du 2 ^{ème} passage dans la boucle
Valeur de la variable a	5	5	5
Valeur de la variable n	0	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$
Valeur de la variable b	1	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 1 = 25$

À la fin du premier passage a , b , n valent respectivement 5, 5, 1.

À la fin du second passage a , b , n valent respectivement 5, 25, 2.

2) Ce que réalise ce programme

À chaque passage dans la boucle la valeur de la variable b est multipliée par 5.

À l'issue de la troisième répétition de la boucle, le programme affiche pendant 3 secondes la valeur de 5^3 soit « 125 » et « 3 ».

À l'issue de la dixième et dernière répétition de la boucle, le programme affiche la valeur de 5^{10} soit « 9 765 625 » et « 10 ».

Le programme affiche successivement les dix premières puissances de 5 ainsi que l'exposant correspondant.

1) Affirmation 1

L'affirmation « le volume d'un cube, dont la surface totale extérieure mesure 576 cm^2 , est inférieure à 1 litre » est vraie.

Méthode 1

Tout cube a 6 faces carrées superposables donc l'aire d'une face du cube considéré est égale à $\frac{576}{6} \text{ cm}^2$ soit 96 cm^2 .

L'aire d'un carré étant égale au carré de son côté, le côté de ce cube est égal à $\sqrt{96} \text{ cm}$.

Le volume de ce cube est ainsi égal à $(\sqrt{96})^3 \text{ cm}^3$ soit environ $940,6 \text{ cm}^3$ ou $0,9406 \text{ dm}^3$ ou $0,9406 \text{ L}$, ce qui est inférieur à 1 L.

Méthode 2

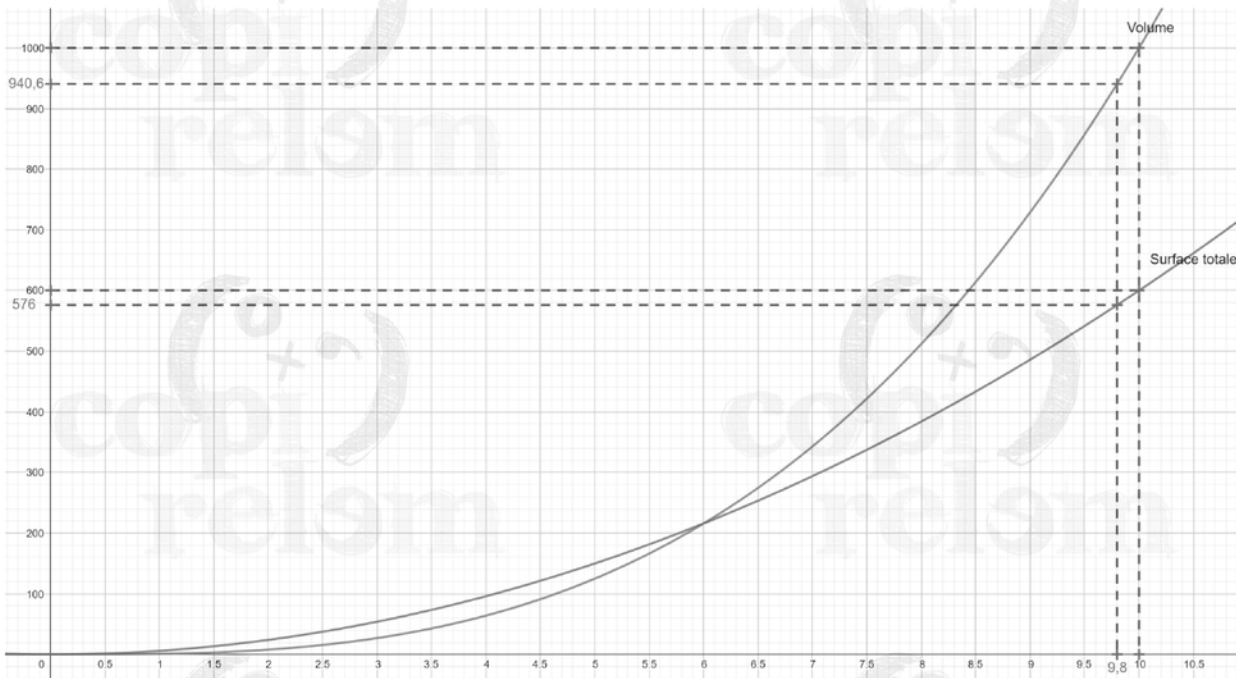
Un cube de volume 1 litre, soit 1 dm^3 , a une arête de 1 dm soit 10 cm. Une face d'un tel cube a une aire égale à $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ soit 100 cm^2 , et l'aire de sa surface extérieure est égale à 600 cm^2 .

Cette valeur est supérieure à 576 cm^2 .

On en déduit, par division par 6, que l'aire d'une face du cube de l'énoncé est inférieure à l'aire d'une face du cube d'arête 10 cm, puis que l'arête du cube de l'énoncé est plus courte que 10 cm, et enfin que le volume du cube de l'énoncé est inférieur au volume du cube d'arête 10 cm, donc à 1 L.

Remarque

On a utilisé implicitement la croissance des fonctions qui à l'arête d'un cube associent respectivement son volume et son aire totale. Le graphique ci-dessous représente ces deux fonctions : on constate que quand l'aire totale est plus grande, l'arête est plus grande et le volume est plus grand.



2) Affirmation 2

L'affirmation « l'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres » est fausse.

Il suffit de considérer le contre-exemple suivant.

Prenons les deux nombres 2 et 3.

L'inverse de la somme des deux nombres vaut $\frac{1}{2+3}$, soit $\frac{1}{5}$.

La somme des inverses des deux nombres vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ soit $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ soit $\frac{5}{6}$.

Comme $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{6}$, l'affirmation est fausse.

Complément

On peut aussi montrer que l'affirmation est fausse quels que soient les nombres choisis. La recherche d'un contre-exemple est tout de même à privilégier car elle est bien plus simple à mettre en œuvre.

Prenons a et b deux nombres quelconques non nuls dont la somme est non nulle (sinon les inverses n'existent pas).

L'inverse de leur somme qu'on appelle A vaut $\frac{1}{a+b}$.

La somme de leurs inverses qu'on appelle B vaut $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Mettons A et B sur le même dénominateur pour les comparer. Quelles que soient les valeurs de a et b , non nulles, dont la somme est non nulle,

$$A = \frac{1}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)ab}$$

$$B = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)b}{(a+b)ab} + \frac{(a+b)a}{(a+b)ab} = \frac{ab + b^2 + a^2 + ba}{(a+b)ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)ab}$$

- 1^{er} cas : si $ab < 0$

$A < 0$ et $B > 0$ (car le carré d'un nombre est toujours positif) donc $B > A$ et B est donc différent de A .

- 2^{ème} cas : si $ab > 0$

$2ab > ab$ donc $a^2 + b^2 + 2ab > ab$ soit $(a+b)^2 > ab$. On en déduit que $B > A$, et que B est donc différent de A .

Les nombres A et B ne sont jamais égaux quels que soient les nombres a et b choisis.

Remarque

Le cas $a.b = 0$ n'est pas possible car a et b sont non nuls.

3) Affirmation 3

L'affirmation « le prix final est 5% plus élevé que le prix initial quand celui-ci subit une baisse de 30% puis une hausse de 50%. » est vraie.

Méthode 1

Appliquer une baisse de 30 % à une grandeur revient à la multiplier par 0,70.

Appliquer une hausse de 50 % à une grandeur revient à la multiplier par 1,50.

Or $0,70 \times 1,50 = 1,05$, et multiplier par 1,05 revient à appliquer une augmentation de 5 %.

Une baisse de 30 % suivie d'une hausse de 50 % équivalent donc bien à une augmentation de 5 %.

Méthode 2

Soit p le prix initial.

Après la baisse de 30 % le prix devient $0,70 p$.

Après une hausse de 50 % le prix devient : $1,50 \times (0,70 p)$ soit $1,05 p$.

Cela correspond bien à une augmentation globale de 5 % par rapport au prix initial.

Remarque

On utilise le coefficient multiplicatif $1 + \frac{x}{100}$ pour traduire une augmentation de x % de p car :

$$p + x \% \text{ de } p = p + \frac{x}{100} \times p = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times p.$$

4) Affirmation 4

L'affirmation « les points C, D, E sont alignés » est fausse.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{CDE}$ à l'aide de l'égalité suivante : $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE}$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{CDA}$.

Le codage de la figure indique que le triangle ADC est rectangle et isocèle en C.

Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° .

ADC est isocèle donc les angles à la base sont égaux.

Ainsi,

$$\widehat{CDA} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{ADB}$.

Le codage indique que le triangle ADB est isocèle en B.

Les angles à la base en A et D sont égaux donc $\widehat{ADB} = 50^\circ$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{BDE}$.

Le codage indique que le triangle BDE est rectangle en E.

La somme des angles vaut 180° .

$$\text{Ainsi } \widehat{BDE} = 180^\circ - \widehat{DBE} - \widehat{BED} = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ.$$

Conclusion

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 45^\circ + 50^\circ + 65^\circ = 160^\circ.$$

$\widehat{CDE}$ n'est donc ni un angle plat, ni un angle nul : **les points C, D et E ne sont donc pas alignés.**