

PARTIE A : étude d'un cas particulier

1) Calcul du volume de la boîte

La boîte obtenue forme un pavé droit, ou encore un prisme droit, à base carrée.

Sa base est un carré dont la longueur du côté est : $25 \text{ cm} - 2 \times 2 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$ et dont l'aire est : $(21 \text{ cm})^2 = 441 \text{ cm}^2$

Sa hauteur est 2 cm.

Son volume est donc égal à : $V = \text{Aire}(\text{base}) \times \text{hauteur} = 441 \text{ cm}^2 \times 2 \text{ cm} = 882 \text{ cm}^3$

2) Aire de la surface de carton

Méthode 1 : par soustraction d'aires

L'aire A de la surface de carton utilisée s'obtient en enlevant quatre carrés de 2 cm de longueur de côté au carré initial de 25 cm de longueur de côté.

D'où $A = (25 \text{ cm})^2 - 4 \times (2 \text{ cm})^2 = 625 \text{ cm}^2 - 4 \times 4 \text{ cm}^2 = 625 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = 609 \text{ cm}^2$.

Méthode 2 : par addition d'aires

Les quatre bords de la boîte ABFE, BCGF, CDHG et DAEF étant superposables, l'aire A de la surface de carton utilisée s'obtient en ajoutant à l'aire de la base, le quadruple de l'aire de l'un de ces bords, par exemple ABFE. Ce dernier est un rectangle de longueur 21 cm et de largeur 2 cm.

L'aire A de la surface de carton utilisée est donc :

$A = 441 \text{ cm}^2 + 4 \times 21 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 441 \text{ cm}^2 + 4 \times 42 \text{ cm}^2 = 441 \text{ cm}^2 + 168 \text{ cm}^2 = 609 \text{ cm}^2$.

PARTIE B : étude du cas général

1) Valeurs possibles de x

x est une longueur, sa mesure (quelle que soit l'unité choisie) est donc un nombre réel positif.

Par ailleurs, puisque l'on doit pouvoir rabattre deux bords à partir d'un même côté du carré initial, le double de la longueur x doit être inférieur à 25 cm.

Ainsi la longueur x est comprise entre 0 cm et 12,5 cm.

Remarque :

L'énoncé cultive une certaine ambiguïté entre la longueur et sa mesure. La phrase « On note x la longueur.... » semble indiquer que la lettre x désigne une longueur (c'est-à-dire une grandeur), mais dans la suite de l'énoncé il s'agit en fait de sa mesure exprimée en centimètres. Il aurait plus correct d'écrire : « On note x la mesure, exprimée en centimètres, de la longueur du côté du carré enlevé.... ». Dans la suite de l'énoncé on considèrera, afin de simplifier l'écriture des calculs, que x , $V(x)$... désignent des mesures dans les unités adéquates et sont donc des nombres.

2) Expression du volume V en fonction de x

Comme déjà indiqué dans la partie A, le volume de la boîte est celui d'un pavé droit, ou encore d'un prisme droit, de base carrée.

Sa base est un carré de côté : $25 - 2x$ et d'aire : $(25 - 2x)^2$.

Sa hauteur est égale à : x .

Son volume est donc égal à : $V(x) = \text{Aire}(\text{base}) \times \text{hauteur} = (25 - 2x)^2 \times x = x(25 - 2x)^2$.

3) Expression de l'aire de la surface de carton en fonction de x *Méthode 1 : par soustraction d'aires*

L'aire A de la surface de carton utilisée s'obtient en enlevant quatre carrés de x cm de longueur de côté (les chutes) au carré initial de longueur de côté 25 cm.

D'où $A(x) = 25^2 - 4 \times x^2 = 625 - 4x^2$.

Méthode 2 : par addition d'aires

Comme déjà indiqué dans la partie A, les quatre bords de la boîte ABFE, BCGF, CDHG et DAEF sont superposables, et l'aire $A(x)$ de la surface de carton utilisée s'obtient en ajoutant à l'aire de la base, le quadruple de l'aire de l'un de ces bords, par exemple ABFE.

Celui-ci est ici un rectangle de longueur : $25 - 2x$ et de largeur : x .

L'aire A de la surface de carton utilisée est donc :

$$A(x) = (25 - 2x)^2 + 4 \times (25 - 2x) \times x$$

$$A(x) = 625 - 100x + 4x^2 + 4 \times (25x - 2x^2) \text{ en développant l'expression } A(x)$$

$$A(x) = 625 - 100x + 4x^2 + 100x - 8x^2$$

$$A(x) = 625 - 4x^2$$

ou, en commençant par factoriser $A(x)$

$$A(x) = (25 - 2x)^2 + 4 \times (25 - 2x) \times x$$

$$A(x) = (25 - 2x)(25 - 2x) + 4x(25 - 2x)$$

$$A(x) = (25 - 2x)(25 + 2x)$$

$$A(x) = 625 - 4x^2.$$

4) Vérification des résultats de la partie A

Dans la partie A, on a étudié le cas particulier où $x = 2$

En reprenant les formules trouvées aux questions 2) et 3) de cette partie, on retrouve :

$$V(2) = 2 \times (25 - 2 \times 2)^2 = 2 \times 21^2 = 2 \times 441 = 882 \text{ (mesure en cm}^3\text{)}$$

$$\text{et } A(2) = 625 - 4 \times 2^2 = 625 - 4 \times 4 = 625 - 16 = 609 \text{ (mesure en cm}^2\text{)}.$$

5) a) Formule entrée en B2

La colonne B donne la valeur de $V(x)$ en fonction de la valeur de x correspondante dans la colonne A.

L'expression algébrique de cette fonction a été obtenue à la question 2 de la partie B.

Il suffit de la traduire.

Ainsi, la formule suivante, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, donne l'ensemble des valeurs de la colonne B : $=A2*(25-2*A2)^2$

Autre solution évitant le recours à la notation avec exposant : $=A2*(25-2*A2)*(25-2*A2)$.

5) b) Existence et encadrement des solutions

On utilise la relation : $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$

La question est donc de savoir s'il existe des valeurs de x pour lesquelles $V(x) = 1000$ (mesure en cm^3).

Comme on a $V(2) = 882$, qui est inférieur à 1 000 et $V(3) = 1083$, qui est supérieur à 1000, on peut en déduire qu'il existe une première solution comprise entre 2 cm et 3 cm.

Par ailleurs, on a $V(6) = 1014$, qui est supérieur à 1000 et $V(7) = 847$, qui est inférieur à 1000, on peut en déduire qu'il existe une seconde solution comprise entre 6 cm et 7 cm.

Ainsi le problème « obtenir une boîte de volume égal à 1 litre » possède deux solutions x_1 et x_2 telles que :

$$2 \text{ cm} < x_1 < 3 \text{ cm} \quad \text{et} \quad 6 \text{ cm} < x_2 < 7 \text{ cm}.$$

Remarque :

Les affirmations précédentes s'appuient sur la continuité de la fonction V (notion hors du programme du collège). C'est cette propriété qui permet d'affirmer que si la fonction prend deux valeurs distinctes, alors elle prend toutes les valeurs qui leur sont intermédiaires.

Attention, dans le cadre d'algorithmes qui porteraient sur des grandeurs discrètes (par exemple avec uniquement des valeurs entières) cette propriété ne serait plus valable.

5) c) Amélioration de l'encadrement

La démarche la plus simple à suivre pour affiner les encadrements précédents et en obtenir d'amplitude 0,1 cm consiste à :

- rentrer dans une première colonne des valeurs de x avec un pas de 0,1 (c'est-à-dire de 0,1 en 0,1) :
 - o en partant de 2 et en allant jusqu'à 3 pour encadrer x_1 ;
 - o en partant de 6 et en allant jusqu'à 7 pour encadrer x_2 .
- dans la colonne voisine, à l'aide d'une formule analogue à celle obtenue à la question 5) a), faire calculer par le tableur les valeurs correspondantes de $V(x)$
- pour encadrer x_1 , trouver les deux valeurs successives de x pour lesquelles $V(x)$ passe d'une valeur inférieure à 1 000 à une valeur qui lui est supérieure ; et respectivement supérieure et inférieure pour encadrer x_2 .

Remarque :

En répétant cette démarche, on peut obtenir des encadrements d'amplitude 0,01, puis 0,001, etc. Cette itération conduit à des résultats aussi précis que souhaité, en restant toutefois dans la limite des capacités de calcul du tableur.

Complément :

À titre d'illustration, voici ce que donne la mise en œuvre de cette démarche pour obtenir des valeurs approchées au centième près des deux solutions.

F2		fx		=E2*(25-2*E2)^2					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	V(x)			x	V(x)	x	V(x)	
2	0	882			2	882			
3	1	529			2,1	908,544			
4	2	882			2,2	933,592			
5	3	1083			2,3	957,168			
6	4	1156	Encadrement de x_1		2,4	979,296			
7	5	1125			2,5	1000			
8	6	1014			2,6	1019,304			
9	7	847			2,7	1037,232			
10	8	648			2,8	1053,808			
11	9	441			2,9	1069,056			
12	10	250			3	1083			
13	11	99	Encadrement de x_2		6	1014	6,00	1014	
14	12	12			6,1	999,424	6,01	1012,5672	
15	12,5	0			6,2	984,312	6,02	1011,12883	
16					6,3	968,688	6,03	1009,68491	
17					6,4	952,576	6,04	1008,23546	
18					6,5	936	6,05	1006,7805	
19					6,6	918,984	6,06	1005,32006	
20					6,7	901,552	6,07	1003,85417	
21					6,8	883,728	6,08	1002,38285	
22					6,9	865,536	6,09	1000,90612	
23					7	847	6,10	999,424	

Pour x_1 , on est dans un cas particulier puisque le calcul effectué par le tableur suggère que 2,5 en est la valeur exacte (et pas seulement une valeur approchée à 0,1 près) ; ce que le calcul confirme.

Pour x_2 , les calculs effectués par le tableur selon cette démarche conduisent successivement aux encadrements en cm : $6 < x_2 < 6,1$ puis $6,09 < x_2 < 6,10$, et l'on pourrait poursuivre pour affiner l'encadrement.

6) a) Lecture graphique du volume obtenu à la question 1 de la partie A

Ce graphique est celui de la courbe représentative du volume de la boîte (placé en ordonnée) en fonction de la longueur du côté du carré de base (placé en abscisse).

Dans la question 1 de la partie A, on étudie le cas particulier où $x = 2$ cm

Pour obtenir, par lecture graphique, une valeur approchée de $V(2)$, il faut :

- tracer la droite d'équation : $x = 2$, qui est une droite parallèle à l'axe des y ;
- déterminer son point d'intersection avec la courbe représentative du volume ;

- lire ensuite sur l'axe des y , l'ordonnée de ce point d'intersection, dont la valeur est égale à $V(2)$.

La précision du graphique permet d'affirmer que la valeur de $V(2)$ est comprise entre 850 cm^3 et 900 cm^3 .
En s'avancant un peu, on peut penser que cette valeur est légèrement plus proche de 900 cm^3 que 850 cm^3 , mais il est difficile d'aller au-delà.

6) b) Lecture graphique du volume maximal

Il s'agit de déterminer le point de la courbe représentative ayant la plus grande ordonnée.

C'est cette ordonnée qui correspond au volume maximal qu'il est possible d'obtenir.

L'abscisse de ce point donne, pour sa part, la valeur de la longueur du côté du carré qui conduit à ce volume maximal.

La précision du graphique permet d'affirmer que le volume maximal est compris entre 1150 cm^3 et 1200 cm^3 (en étant sensiblement plus proche de 1150 cm^3 que de 1200 cm^3) et que la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint est comprise entre 4 cm et $4,5 \text{ cm}$.

6) c) Lecture graphique des valeurs pour lesquelles la boîte a pour volume 1 L

Rappelons qu'un volume de 1 L correspond à $1\,000 \text{ cm}^3$.

Il s'agit donc ici de :

- tracer la droite d'équation $y = 1000$ (il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des x) ;
- déterminer ses points d'intersection avec la courbe représentative du volume ; il y en a deux ;
- lire aussi que précisément que possible (éventuellement en s'aidant de mesures) les abscisses x_1 et x_2 de ces deux points d'intersection.

La droite d'équation $y = 1000$ coupe une première fois la courbe au point de coordonnées $(2,5 ; 1000)$.

La valeur approchée au millimètre près de x_1 est donc $2,5 \text{ cm}$ (ou 25 mm).

Cette même droite coupe ensuite la courbe en un point dont l'abscisse est comprise entre 6 cm et $6,5 \text{ cm}$.

L'écart entre ce point d'intersection et le point de coordonnées $(6 ; 1000)$ (qui n'est pas sur la courbe) rapporté à l'écart entre deux graduations successives en demi-centimètres permet de proposer $6,1 \text{ cm}$ (ou 61 mm) comme valeur approchée au millimètre près de x_2 .

PARTIE C : couvercle de la boîte

1) Hauteur JE de la pyramide

Méthode 1 : en raisonnant algébriquement à partir des formules

La boîte et son couvercle sont respectivement un prisme et une pyramide de même base (ABCD et EFGH sont superposables) et dont les hauteurs sont respectivement $AE = 6 \text{ cm}$ et JE .

Le volume de la boîte est égal à $V(\text{boîte}) = \text{base} \times \text{hauteur} = \text{Aire}(\text{EFGH}) \times AE$.

Le volume du couvercle est égal à $V(\text{couvercle}) = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{EFGH}) \times JE$.

Ces deux volumes sont donc égaux si $\frac{1}{3} \times JE = AE$

c'est-à-dire si $JE = 3 \times AE = 3 \times 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$.

Remarque :

De façon générale, le raisonnement précédent montre qu'un prisme étant donné, pour qu'une pyramide ayant même base ait aussi même volume que ce prisme, il faut que sa hauteur soit égale au triple de la hauteur du prisme.

Méthode 2 : À l'aide de calculs numériques portant sur chacun des deux volumes

Le volume de la boîte s'obtient :

- soit en utilisant la formule générale du volume d'un pavé droit :
La boîte a pour base un carré de longueur du côté $25 \text{ cm} - 2 \times 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ et pour hauteur 6 cm .
Son volume est $V(\text{boîte}) = 13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 1014 \text{ cm}^3$.
- soit en utilisant la formule algébrique obtenue à la question 2 de la partie B.
On est dans le cas où $x = 6 \text{ cm}$, la mesure en cm^3 du volume de la boîte est donc :
 $V(6) = 6 \times (25 - 2 \times 6)^2 = 6 \times 13^2 = 6 \times 169 = 1014$.

- soit tout simplement par lecture du tableau de valeurs de la question 5 de la partie B.

Le couvercle est une pyramide dont la base carrée EFGH a pour aire $13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$

L'expression de son volume en fonction de la hauteur JE est donc :

$$V(\text{couvercle}) = \frac{1}{3} \times 169 \text{ cm}^2 \times \text{JE}$$

Pour que les deux volumes soient égaux, on doit avoir :

$$\frac{1}{3} \times 169 \text{ cm}^2 \times \text{JE} = 1014 \text{ cm}^3$$

$$\text{d'où } 169 \text{ cm}^2 \times \text{JE} = 3 \times 1014 \text{ cm}^3 = 3042 \text{ cm}^3$$

$$\text{et finalement } \text{JE} = \frac{3042 \text{ cm}^3}{169 \text{ cm}^2} = 18 \text{ cm}.$$

En conclusion, pour que le couvercle ait même volume que la boîte, l'artisan pâtissier doit choisir une hauteur de 18 cm pour JE.

2) Patron de la pyramide

Nombre et nature des faces

Le couvercle EFGHJ est une pyramide à base carrée.

C'est un solide qui possède 5 faces :

- la face EFGH est un carré dont la longueur du côté est égale à $25 \text{ cm} - 2 \times 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$.
- les 4 autres faces sont des triangles rectangles :
 - J, E et A étant alignés, la droite (JE) est orthogonale au plan (EFGH). Elle est donc perpendiculaire à la fois à la droite (EF) et à la droite (EH).
Les faces JEF et JEH sont deux triangles rectangles en E dont les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm (pour JE) et 13 cm (pour EF et EH), et sont superposables.
 - La droite (GF) est orthogonale au plan (EFBA) auquel appartient la droite (JF). Ainsi les droites (GF) et (JF) sont perpendiculaires et le triangle GFJ est un triangle rectangle en F. De même, la droite (GH) est orthogonale au plan (HEAD) auquel appartient la droite (JH). Ainsi les droites (GH) et (JH) sont perpendiculaires et le triangle GHJ est un triangle rectangle en H.
Notons que les triangles GFJ et GHJ sont superposables : ils ont chacun un angle droit, leurs côtés [GF] et [GH] sont chacun égaux à 13 cm, et leurs seconds côtés de l'angle droit, [FJ] et [HJ], sont respectivement les hypoténuses des triangles EFJ et EHJ dont on a vu qu'ils étaient eux-mêmes superposables.

Construction d'un patron

Remarque :

Comme tout solide, une pyramide à base carrée possède plusieurs patrons. Nous proposons ici un des patrons qui est souvent choisi.

Pour obtenir ce patron, nous procéderons comme si nous dépliions chaque face latérale en la faisant pivoter autour du côté de la base à laquelle elle est jointe jusqu'à l'amener dans le plan de cette base.

Les quatre faces triangulaires auront chacune un côté commun avec la base carrée et pour chacune, le troisième sommet correspondra au sommet J de la pyramide.

Nous noterons J_1 , J_2 , J_3 et J_4 , ces 4 sommets des faces triangulaires du patron correspondants au sommet J de la pyramide.

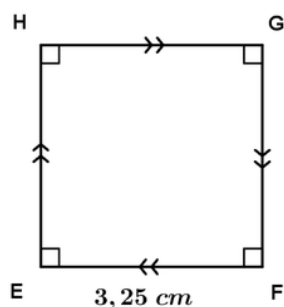
Remarque :

Les figures de cette question ne sont pas obligatoirement aux bonnes dimensions à cause des contraintes d'édition, mais nous avons fait en sorte qu'elle soit toutes à la même échelle.

Étape 1 : tracé à l'échelle $\frac{1}{4}$ de la face carré EFGH.

Dans la réalité, le carré a un côté de longueur 13 cm (vu précédemment).

Sur cette représentation à l'échelle $\frac{1}{4}$, la longueur du côté du carré doit être de $\frac{13 \text{ cm}}{4} = 3,25 \text{ cm}$.

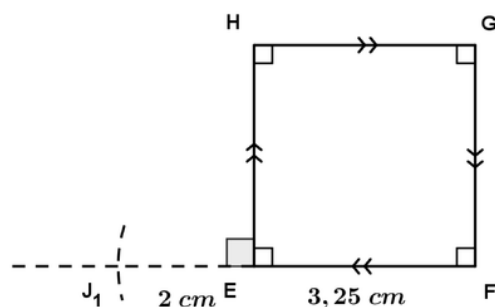


Étape 2 : tracé de la face HEJ_1

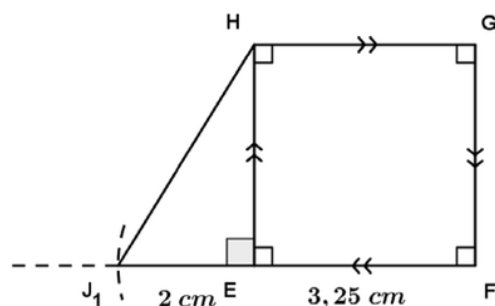
Étape 2a : placement du point J_1

On sait d'une part que l'angle $\widehat{HEJ_1}$ est droit (les droites (HE) et (EJ) sont perpendiculaires) et d'autre part que, sur le patron à l'échelle $\frac{1}{4}$, on a :

$$EJ_1 = \frac{1}{4} \times EJ = \frac{1}{4} \times 8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$



Étape 2b : tracé la face EHJ_1 en joignant H et J_1

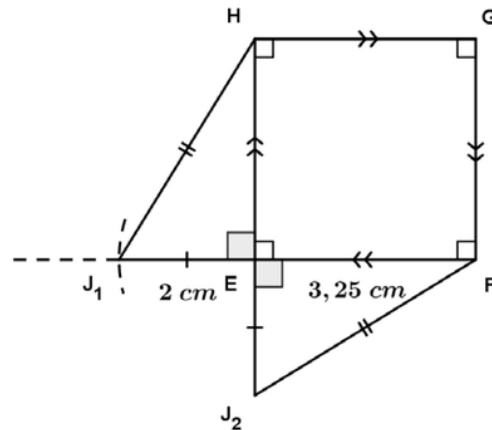


Étape 3 : tracé de la face EFJ_2

On procède comme pour la face précédente mais cette fois-ci à partir du côté EF de la base.

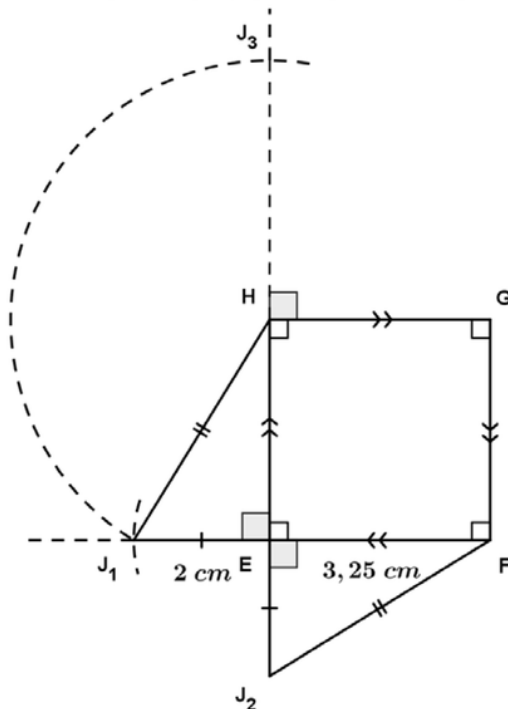
À noter que pour la longueur EJ_2 , on peut utiliser soit la règle graduée pour prendre la longueur 2 cm, soit le compas pour reporter la longueur EJ_1 puisque $EJ_2 = EJ_1$.

On codera aussi sur le graphique l'égalité entre les segments J_1H et J_2F puisque les triangles J_1HE et J_2FE sont superposables.

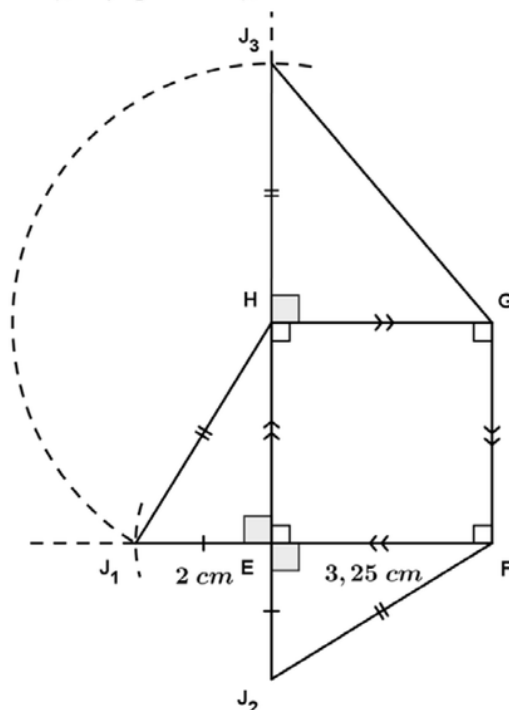
Étape 4 : tracé de la face GHJ_3 Étape 4a : placement du point J_3

On sait d'une part, que l'angle $\widehat{GHJ_3}$ est droit (les droites (HE) et (EJ)) sont perpendiculaires) et d'autre part, que les segments HJ_1 et HJ_3 sont égaux puisqu'ils correspondent tous deux à une même arête du solide.

On prolonge donc la droite (EH) pour avoir la perpendiculaire à (GH) passant par H, puis on trace un arc du cercle de centre H et passant par J_1 pour reporter la longueur HJ_1 . Leur intersection est J_3 .

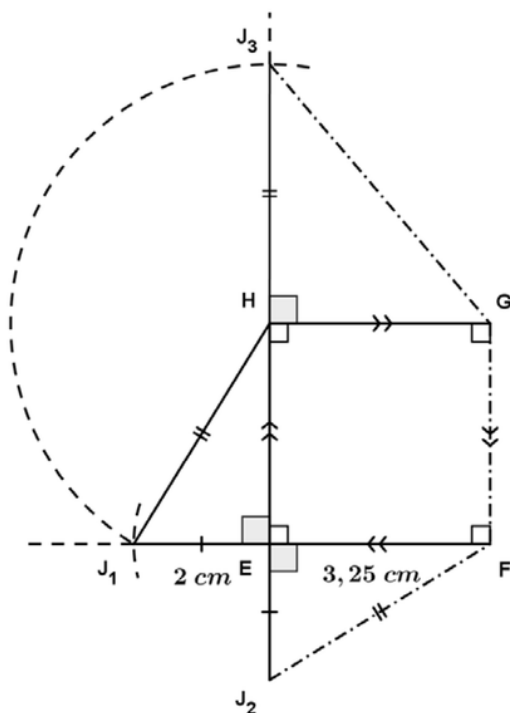


Étape 4b : tracé de la face GHJ_3 en joignant G et J_3



Étape 5 : tracé de la face GFJ_4

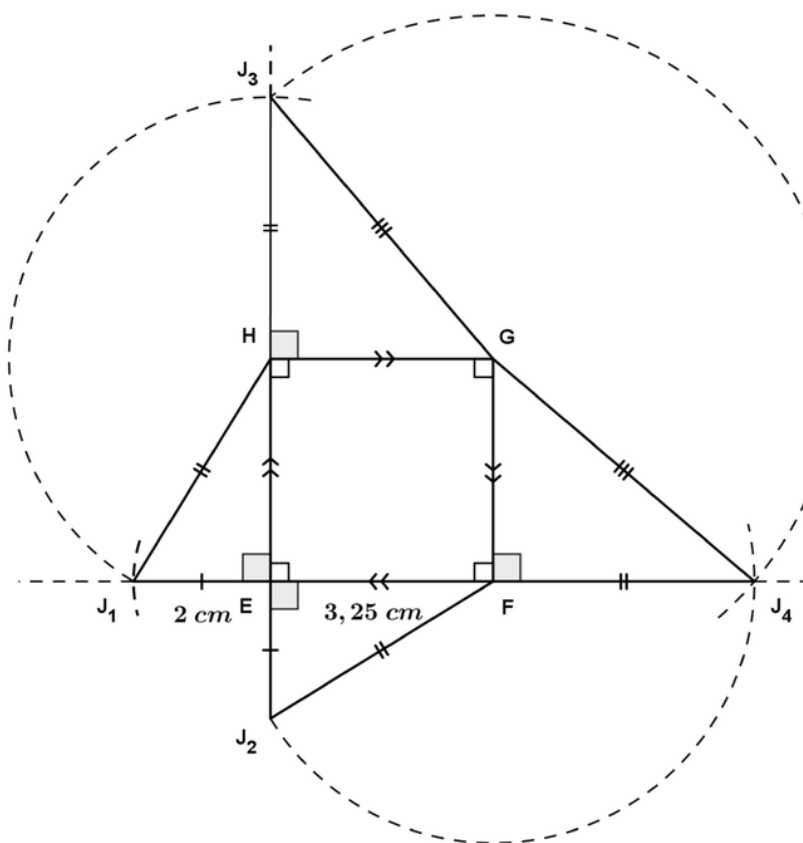
Remarquons que nous connaissons graphiquement les longueurs des trois côtés de cette face (elles sont en pointillés ci-dessous)



On dispose donc sur J_4 des trois informations suivantes :

- $GJ_4 = GJ_3$, car ces deux segments correspondent à une même arête du solide ;
- $FJ_4 = FJ_2$, pour la même raison ;
- l'angle $\widehat{GFJ_4}$ est droit puisque le triangle est rectangle.

Deux de ces renseignements suffisent pour placer J_4 , le troisième permet de vérifier la validité de l'ensemble de la construction.



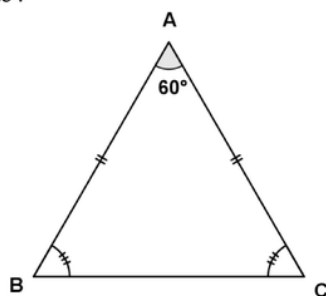
PARTIE D : décoration de la boîte

1) Justification de la nature du triangle ABC

Comme AB et AC sont deux rayons d'un même cercle, ils sont égaux et l'on peut déjà affirmer que ABC est un triangle isocèle en A.

Par ailleurs, comme B et C sont deux sommets consécutifs d'un hexagone régulier de centre A, la mesure de l'angle au centre $\widehat{BAC}$ est égal à $\frac{1}{6}$ de tour, c'est-à-dire à $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

On est donc dans la situation suivante :



Pour conclure, on utilise la propriété suivante :

« un triangle isocèle ayant un angle de mesure 60° est un triangle équilatéral »

- soit en la citant comme un résultat connu ;
- soit en la redémontrant comme ci-dessous :

Comme le triangle ABC est isocèle en A, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.

Comme la mesure de la somme des angles de tout triangle vaut 180° , la mesure de la somme de ces deux angles vaut $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ et la mesure de chacun d'eux est donc égal à 60° .

Le triangle ABC a donc trois angles égaux à 60° , **il est donc équilatéral**.

2) Reproduction en vraie grandeur de la figure

Notons qu'ici tous les instruments de géométrie et de mesure sont autorisés.

Notons aussi que les propriétés utilisées pour effectuer cette reproduction n'ont pas à être justifiées.

Même si le programme de construction n'est pas demandé, nous en proposons deux parmi le grand nombre de chemins qu'il était possible de suivre pour réaliser cette reproduction de figure.

Dans le premier programme, on part du carré ; dans le second, on s'appuie au départ sur des cercles.

Construction n°1 :

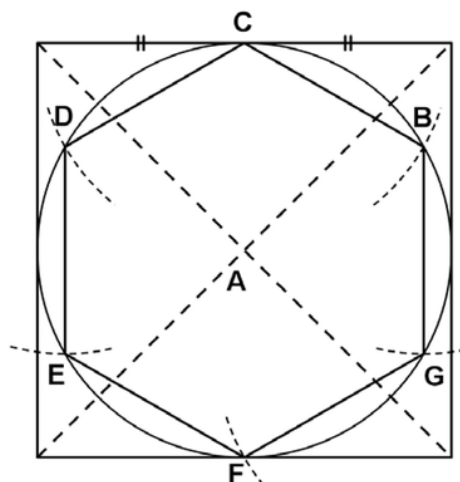
- Tracer un carré de 6 cm de longueur de côté.
- Placer le milieu C de l'un des côtés du carré (en traçant sa médiatrice ou tout simplement en mesurant).
- Tracer les deux diagonales du carré. On note A leur point d'intersection.
- Tracer le cercle de centre A et de rayon AC (ce rayon est 3 cm) ; veiller à être précis et à assurer la tangence entre ce cercle et le carré initial.
- Tracer le cercle de centre C et de rayon CA (c'est-à-dire encore 3 cm). Il coupe le premier cercle en deux points B et D qui sont des sommets de l'hexagone.
- En conservant le même rayon, tracer les cercles de centre B et D. Ces deux cercles recoupent le cercle initial respectivement en G et E.
- Toujours avec le même rayon, tracer le cercle de centre G. Il recoupe le cercle initial en F.
- Tracer l'hexagone BCDEFG
- Eventuellement effacer les traits de construction.

Construction n°2 :

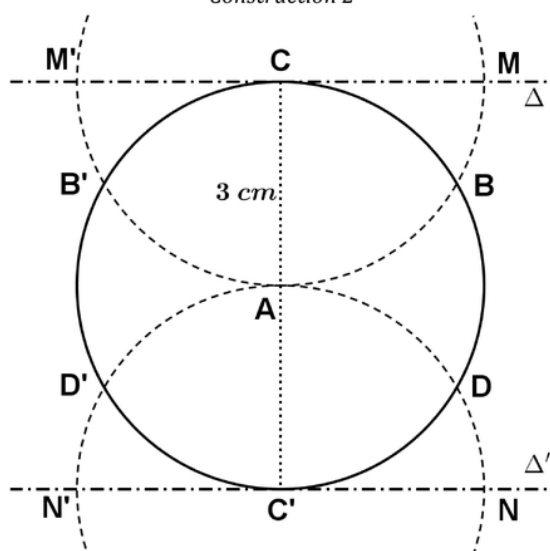
- Tracer le cercle de centre A et de rayon 3 cm.
- Placer deux points C et C' diamétralement opposés sur ce premier cercle.
- Tracer les droites Δ et Δ' perpendiculaires respectivement en C et C' au diamètre [CC'].
- Tracer le cercle de centre C passant par A. Il coupe le cercle initial en deux points B et B' et la droite Δ en deux points M et M' (situés à 3 cm de part et d'autre de C) de telle façon que M, B, B' et M' sont placés dans cet ordre sur le cercle.
- Tracer le cercle de centre C' et passant par A. Il coupe le cercle initial en deux points D et D' et coupe la droite Δ' en deux points N et N' (situés à 3 cm de part et d'autre de C') de telle façon que N, D, D' et N' sont placés dans cet ordre sur le cercle et que sur le cercle initial D soit situé entre D et C'.
- Tracer l'hexagone régulier BCB'D'C'D.
- Tracer le carré MM'N'N.
- Éventuellement effacer les traits de construction.

On trouvera sur la page suivante les figures obtenues avant l'effacement des traits de construction pour le premier cas, avant l'effacement et le tracé du carré et de l'hexagone dans le second.

Construction 1



Construction 2



3) Calcul de l'aire de l'hexagone

L'hexagone peut se décomposer en six triangles superposables au triangle ABC.
Son aire est donc égale à six fois celle du triangle ABC, qu'il s'agit donc de déterminer.

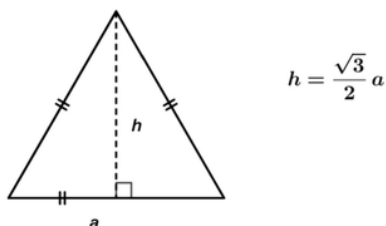
De façon générale, l'aire d'un triangle de base b et de hauteur h vérifie :

$$\text{Aire (triangle)} = \frac{1}{2} b \times h.$$

Méthode 1 : en utilisant, si on la connaît, l'expression de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.

Détermination de l'aire du triangle ABC.

Dans un triangle équilatéral de côté a , sa hauteur h vérifie : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.



Ainsi l'aire de ce triangle équilatéral est : $Aire = \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

Ici le côté a du triangle équilatéral ABC est égal au rayon du cercle inscrit dans le carré de 6 cm de côté, donc à la moitié de la mesure de la longueur du côté de ce carré, c'est-à-dire à 3 cm.

On a donc : $Aire(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3 \text{ cm})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

Détermination de l'aire de l'hexagone

On a : $Aire(Hexagone) = 6 \times Aire(ABC)$

$Aire(Hexagone) = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{54\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ (c'est la valeur exacte demandée).

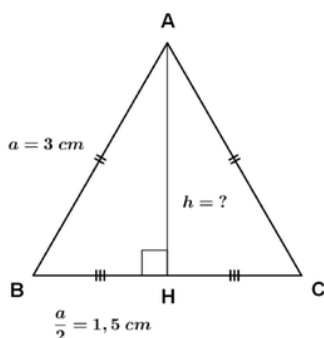
Dans la mesure où $\frac{27}{2}$ est un nombre décimal, on pouvait aussi donner $13,5\sqrt{3} \text{ cm}^2$ comme valeur exacte.

Méthode 2 : en calculant la hauteur du triangle équilatéral ABC

Détermination de l'aire du triangle ABC

Notons H le milieu de [BC]. Le triangle ABC étant équilatéral, H est aussi le pied de la hauteur issue de A.

Nous avons donc la situation suivante, dans laquelle on connaît $AB = 3 \text{ cm}$ et $BH = 1,5 \text{ cm}$ et où il s'agit de déterminer la hauteur AH :



Le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle ABH rectangle en H donne :

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \text{ d'où } AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3^2 - 1,5^2 = 9 - 2,25 = 6,75$$

On obtient $AH = \sqrt{6,75} \text{ cm}$

puis $Aire(ABC) = BC \times AH = 3 \text{ cm} \times \sqrt{6,75} \text{ cm} = 3 \times \sqrt{6,75} \text{ cm}^2$.

Détermination de l'aire de l'hexagone

On a : $Aire(Hexagone) = 6 \times Aire(ABC)$

$$Aire(Hexagone) = 6 \times 3 \times \sqrt{6,75} \text{ cm}^2 = 18\sqrt{6,75} \text{ cm}^2$$

Remarque :

On peut vérifier que les valeurs exactes obtenues par ces deux méthodes sont bien égales à l'aide d'un calcul portant sur les racines carrées :

$$9\sqrt{6,75} = 9\sqrt{\frac{675}{100}} = 9\sqrt{\frac{27 \times 25}{100}} = 9\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{9}{2}\sqrt{27} = \frac{9}{2}\sqrt{9 \times 3} = \frac{9}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{27}{2}\sqrt{3}.$$

Arrondi au mm^2

Rappelons que : $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$. L'arrondi au mm^2 s'obtient donc à partir d'une valeur approchée en cm^2 en conservant les deux premiers chiffres après la virgule.

À partir de la valeur approchée $23,3826\dots \text{ cm}^2$, on pouvait proposer comme arrondi au mm^2 de l'aire de l'hexagone soit $23,38 \text{ cm}^2$, soit $2\,338 \text{ mm}^2$.

Remarque :

Pour contrôler ce calcul, on pouvait comparer ce résultat à l'aire du carré (36 cm^2) ou encore à celle du disque ($\pi \times (3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$) dans lesquels cet hexagone est inscrit.

On obtient bien une valeur qui leur est inférieure, assez légèrement comme attendu dans le cas du disque.

1) Calcul du prix soldé

Suite à la réduction de 30 %, le prix soldé en euros est égal à :

$$(1 - 0,30) \times 132 \text{ €} = 0,70 \times 132 \text{ €} = \mathbf{92,40 \text{ €}}.$$

2) Calcul du prix initial connaissant le prix soldé

Si le prix initial en euros vaut p , alors après une réduction de 30 % le prix devient :

$$0,70 \times p = 29,40 \text{ €} \quad \text{d'où } p = \frac{29,40 \text{ €}}{0,70} = \mathbf{42 \text{ €}}.$$

3) Fin de solde : réductions cumulées de 50 % ?

Une réduction de 30 % suivie d'une réduction supplémentaire de 20 % revient à multiplier le prix initial par le coefficient multiplicatif $(1 - 0,30) \times (1 - 0,20) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.

Ce coefficient multiplicatif de 0,56 est égal à $(1 - 0,44)$; il correspond à une baisse cumulée de 44 %. L'annonce du propriétaire est donc **inexacte**.

4) Calcul du pourcentage de réduction après augmentation et solde

Une augmentation de 5 % suivie d'une réduction de 30 % revient à multiplier le prix initial par le coefficient multiplicatif $(1 + 0,05) \times (1 - 0,30) = 1,05 \times 0,7 = 0,735$

Ce coefficient multiplicatif de 0,735 est égal à $(1 - 0,265)$.

Il correspond à un **pourcentage de réduction par rapport au prix initial de 26,5 %**.

Remarque :

Ce qui caractérise un algorithme et le programme associé est l'importance de l'ordre des instructions dans l'écriture du texte. C'est pourquoi nous avons numéroté les lignes d'instruction ; dans l'exécution à la main, on exécute dans l'ordre des instructions (sauf instruction contraire de changement de ligne d'instruction, ce qui n'est pas le cas du programme étudié ici).

1) Vérification du résultat 64 après avoir entré le nombre 7

Si on exécute « à la main », ligne après ligne, le programme, on obtient successivement :

- en ligne 2, on demande « donnez-moi un nombre impair » et on répond « 7 »
alors la variable **réponse** = 7 ;
- en ligne 3, **x** = **réponse** = 7 ;
- en ligne 4, **y** = **réponse** + 2 = 7 + 2 = 9 ;
- en ligne 5, après avoir calculé $x \times y + 1 = 7 \times 9 + 1 = 64$,

le programme affiche : « Le résultat est : 64 ».

Le résultat obtenu est 64.

2) Calcul du résultat lorsque 19 est le nombre de départ

Avec un raisonnement analogue en remplaçant 7 par 19, le résultat devient : $19 \times 21 + 1 = 400$.

3) Le résultat est toujours un carré et un multiple de 4

Le résultat est toujours un carré

Si l'on note x le nombre de départ, le résultat est : $x \times y + 1 = x \times (x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1$

Il s'agit alors de remarquer que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ donc **le résultat est bien toujours un carré.**

Remarque :

Il ne suffit pas de le vérifier sur deux exemples ($64 = 8^2$ et $400 = 20^2$)

Le résultat est toujours un multiple de 4

Méthode 1 :

Si x est un nombre impair, il existe un entier n tel que $x = 2n + 1$, et le résultat vaut :

$$(x + 1)^2 = (2n + 1 + 1)^2 = (2n + 2)^2 = (2(n + 1))^2 = 2^2(n + 1)^2 = 4(n + 1)^2$$

et le résultat est donc bien un multiple de 4.

Méthode 2 :

Si x est un nombre impair, alors $x + 1$ est un nombre pair et il existe un entier k tel que $x + 1 = 2k$, et le résultat vaut :

$$(x + 1)^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

et le résultat est donc bien un multiple de 4.

1) Détermination du nombre de tickets à 100 €

Si x désigne le nombre de tickets à 100 €, le nombre total de tickets offerts est :

$$x + 200 + 444 + 330 = x + 974$$

La moyenne m des gains vaut, en euros :

$$m = \frac{x \times 100 + 200 \times 0 + 444 \times 5 + 330 \times 10}{x + 974} = \frac{x \times 100 + 5520}{x + 974} = 8,12$$

x vérifie donc l'équation :

$$x \times 100 + 5520 = (x + 974) \times 8,12$$

d'où

$$100x + 5520 = 8,12x + 7908,88$$

soit

$$(100 - 8,12)x = 7908,88 - 5520$$

soit

$$91,88x = 2388,88$$

$$\text{d'où } x = \frac{2388,88}{91,88} = 26.$$

Il y a 26 tickets à 100 €.

2) a) Nouvelle moyenne en remplaçant les tickets à 100 € par des tickets à 1000 €

La nouvelle moyenne des gains vaut :

$$m = \frac{26 \times 1000 \text{ €} + 200 \times 0 \text{ €} + 444 \times 5 \text{ €} + 330 \times 10 \text{ €}}{26 + 974} = \frac{26000 \text{ €} + 5520 \text{ €}}{1000} = \frac{31520 \text{ €}}{1000} = 31,52 \text{ €}$$

La moyenne des gains vaut 31,52 €.

2) b) La médiane n'est pas modifiée

Il y a en tout $26 + 974$, soit 1000 tickets offerts. Si on ordonne de façon croissante les tickets suivant leurs valeurs en tant que des bons d'achat, alors la médiane M se situera entre la 500^e et la 501^e valeur.

Remplacer les bons d'achats à 100 € par des bons d'achat à 1000 € ne change que la valeur des vingt-six plus grandes valeurs de ces bons d'achat. Les valeurs du 500^e et du 501^e bon ne sont pas changées et la médiane restera donc identique.

1) Caractère insatisfaisant, du point de vue mathématique, des quatre propositions

Remarque :

Il s'agit à chaque fois de distinguer, d'une part le nombre, et d'autre part ses différentes écritures possibles, en étant attentif à la diversité de celles-ci. On privilégiera en conséquence des formulations du type : « un nombre décimal peut s'écrire..... »

Omar :

Un nombre décimal peut avoir une écriture finie avec une virgule mais :

- il peut aussi être représenté par une écriture fractionnaire (sans virgule), comme par exemple $\frac{3}{2}$;
- les nombres entiers, qui sont des nombres décimaux, ont une écriture décimale sans virgule (par exemple, comme 6).

Remarque :

La proposition d'Omar traduit une représentation fréquente mais erronée des nombres décimaux. Selon cette représentation, le marqueur du caractère décimal d'un nombre serait la présence de la virgule : « il y a une virgule dans l'écriture, le nombre est décimal ; il n'y a pas de virgule, le nombre n'est pas décimal ». Cette représentation erronée est à prévenir lorsque l'on conçoit des séquences d'enseignement...

Lucie :

Sa proposition sous-entend :

- d'une part, que les nombres entiers ne sont pas des nombres décimaux,
- d'autre part que tous les nombres situés entre deux entiers sont décimaux, ce qui est faux. Ainsi entre les entiers 1 et 2, on peut trouver des nombres rationnels non décimaux comme $\frac{4}{3}$ ou $\frac{13}{6}$, ou encore des nombres irrationnels correspondants par exemple à la mesure d'une longueur réelle non décimale (comme avec la diagonale d'un carré de côté de longueur 1, qui, bien que comprise entre les deux entiers 1 et 2, n'est pas décimale et vaut $\sqrt{2}$).

Léo :

Il faudrait définir ce que Léo entend par partie entière et partie décimale pour que la définition soit compréhensible et ensuite proposer sa définition en la modifiant : « un nombre qui peut s'écrire ... ».

Dans sa formulation, Léo laisse à penser que ce qu'il nomme « partie entière » et « partie décimale » sont deux parties d'une écriture (et non d'un nombre), la virgule servant graphiquement de séparateur entre ces deux parties indépendantes.

Remarque :

La proposition de Léo tend à renforcer la conception erronée et fréquente selon laquelle un « décimal » est constitué de deux nombres distincts et sans véritable lien entre eux. C'est cette conception erronée qui conduit certains élèves à écrire : $10 \times 24,5 = 240,50$.

Aminata :

Il faudrait avoir une formulation plus précise ; d'une part, en faisant apparaître l'idée que l'écriture fractionnaire est l'une des écritures d'un nombre décimal (mais n'est pas la seule) et en élargissant les dénominateurs possibles à l'ensemble des puissances de 10.

On peut ainsi faire évoluer la proposition d'Aminata en « un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction avec un dénominateur pris parmi les nombres 1, 10, 100, 1000... »

Exemples : $\frac{3}{10}$; $\frac{523}{100}$; $\frac{2\,642}{100\,000}$ ».

2) Phrase susceptible d'être institutionnalisée

La version précisée précédente d'Aminata convient. Cette proposition est dans l'esprit d'une introduction des nombres décimaux à partir des fractions décimales. Les fractions décimales étant une écriture (ou une désignation) d'un nombre décimal.

Conviendrait également une proposition basée sur l'écriture décimale (appelée aussi écriture à virgule dans les programmes) : un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres et éventuellement une virgule. Le défaut de cette proposition est qu'elle n'apporte pas beaucoup de sens mais en revanche, elle permet une reconnaissance efficace d'un nombre décimal si l'écriture est observable. Il est important, dès l'école primaire, de travailler en mathématiques le proverbe « l'habit ne fait pas le moine » en travaillant différentes représentations d'un même objet et différents ostensifs (par exemple, l'affirmation « 3,0 est l'écriture d'un nombre entier » est correcte).