

PREMIERE PARTIE

A - Projet d'aménagement

1) Calcul de la longueur de la clôture (en valeur exacte et arrondie)

La longueur de clôture nécessaire est égale au périmètre du trapèze ABCD, diminuée de la longueur du portail soit $AB + BC + CD + DA - 3,10$ m.

Calculons la longueur BC :

Dans le triangle BEC rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = BE^2 + EC^2$

d'où $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2}$

Comme ABED est un rectangle, on a $BE = AD = 30$ m et $AB = DE = 50$ m

E appartient au segment [DC], donc $DC = DE + EC$ et comme $DC = 70$ m, on a $EC = 70$ m $-$ 50 m $= 20$ m

Ainsi : $BC = \sqrt{30^2 + 20^2}$ m $= \sqrt{900 + 400}$ m $= \sqrt{1300}$ m $= 10\sqrt{13}$ m.

La longueur L de clôture est donc :

$$\begin{aligned} L &= AB + BC + CD + DA - 3,10 \text{ m} \\ L &= (50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30 - 3,10) \text{ m} \\ L &= (146,90 + 10\sqrt{13}) \text{ m} \\ \text{soit } L &\approx 183 \text{ m} \end{aligned}$$

La longueur de clôture nécessaire est égale à $(146,90 + 10\sqrt{13})$ m (valeur exacte) soit, arrondie au mètre près, 183 m.

2) Calcul de l'aire de chacune des trois parties

L'aire de l'espace réservé au potager est l'aire du triangle BEC.

$$\frac{BE \times EC}{2} \text{ m}^2 = \frac{30 \times 20}{2} \text{ m}^2 = 300 \text{ m}^2.$$

L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre AB.

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times 25^2}{2} \text{ m}^2 = \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2$$

soit une aire d'environ 982 m² pour l'espace de plantations florales.

L'aire de l'espace engazonné est égale à l'aire du rectangle ABED de laquelle on soustrait l'aire de l'espace de plantations florales.

$$AB \times EB - \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2 = 50 \times 30 \text{ m}^2 - \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2 \approx 518 \text{ m}^2$$

soit une aire d'environ 518 m² pour l'espace engazonné.

Les aires des espaces réservés au potager, aux plantations florales, au gazon sont, arrondies au mètre carré près, respectivement égales à 300 m², 982 m², 518 m².

B - Plantations.

1) Pourcentage de remise accordée

Sans la remise, pour l'ensemencement, on aurait payé 520×5 euros soit 2600 euros.

Comme le prix facturé est en fait de 1950 euros, la remise est de $(2600 - 1950)$ euros soit 650 euros.

Ceci correspond à $\frac{650 \text{ euros}}{2600 \text{ euros}} = 0,25 = 25 \%$.

Le pourcentage de remise accordée est égal à 25 %.

2) Encadrement du prix du pied de tomates

Méthode 1 :

Le prix des salades est $75 \times 0,22 \text{ €} = 16,50 \text{ €}$. Pour l'achat des salades et des 50 pieds de tomates, il a payé entre 50 € et 55 € donc pour les 50 pieds de tomates, il a payé entre 33,50 € et 38,50 €.

Donc pour un pied de tomates, il a payé entre $\frac{33,50 \text{ €}}{50}$ et $\frac{38,50 \text{ €}}{50}$ soit entre 0,67 € et 0,77 €.

Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.

Méthode 2 :

Appelons x le prix d'un pied de tomate. Le prix payé est alors

$$75 \times 0,22 + 50x = 16,50 + 50x$$

On cherche alors x tel que $50 \leq 16,50 + 50x \leq 55$

Cette double inégalité équivaut à $50 - 16,50 \leq 50x \leq 55 - 16,50$

Puis $33,50 \leq 50x \leq 38,50$

Puis : $\frac{33,50}{50} \leq x \leq \frac{38,50}{50}$

et enfin : $0,67 \leq x \leq 0,77$.

Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.

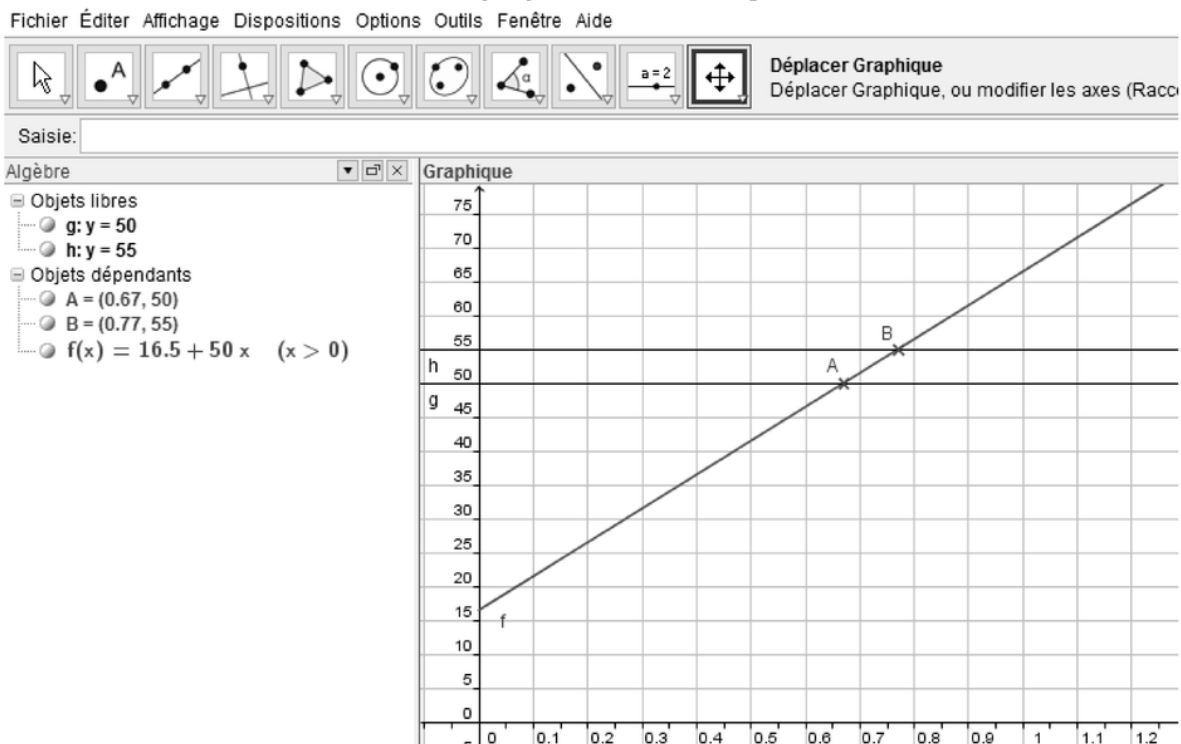
Remarque :

On peut résoudre cette double inéquation en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto 16,50 + 50x$ et de celles des fonctions $g: x \mapsto 50$ et $h: x \mapsto 55$.

Les solutions sont les abscisses des points situés entre les points A et B sur le segment [AB], A et B étant les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g d'une part et f et h d'autre part.

Cette méthode conduit parfois à ne pouvoir fournir qu'une valeur approchée des solutions.

Graphique réalisé sous Géogébra



C - Étude d'un agrandissement du potager

1) a) Encadrement de la longueur AM

M est un point du segment [AB]. Quand M est en A, $x = 0$, et quand M est en B, $x = 50$.

Les valeurs de x possibles sont les valeurs comprises entre 0 et 50 (exprimées en mètres).

1) b) Aire du trapèze MBCG est égale à $1800 - 30x$

Notons A l'aire du trapèze MBCG

Méthode 1 : avec la formule de l'aire d'un trapèze

$$\begin{aligned} A &= \frac{(MB + GC) \times MG}{2} \\ A &= \frac{(50 - x + 70 - x) \times 30}{2} \\ A &= \frac{(120 - 2x) \times 30}{2} \\ A &= (120 - 2x) \times 15 \\ A &= 1800 - 30x \end{aligned}$$

Méthode 2 :

L'aire du trapèze MBCG est égale à la somme des aires du triangle EBC et du rectangle MBEG (avec E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle) :

$$\begin{aligned} A &= \frac{BE \times EC}{2} + MB \times MG \\ A &= 300 + (50 - x) \times 30 \\ A &= 300 + 1500 - 30x \\ A &= 1800 - 30x \end{aligned}$$

L'aire du trapèze MBCG est égale à $1800 - 30x$, l'unité étant le m^2 .

2) Valeurs de formules dans un tableur

a) Dans la cellule B2, la formule saisie peut être **=1800-30*B1**.

b) L'aire calculée dans la ligne 3 est l'aire du demi-disque de diamètre [AM].
En fonction de x , l'expression de cette aire est donnée par :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2}{2}, \text{ soit } \frac{\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}, \text{ soit } \frac{\pi \times \frac{x^2}{4}}{2} \text{ soit finalement } \frac{\pi \times (x)^2}{8}.$$

La formule à saisir dans la cellule B3 est donc **=PI()*B1*B1/8**.

3) Lectures graphiques

3) a) Partie du jardin correspondant à chacune des courbes C1, C2 et C3

Méthode 1 :

La fonction donnant l'aire du potager en fonction de x est $f : x \mapsto 1800 - 30x$.

Cette fonction est affine, sa représentation graphique est donc une droite. C'est la courbe C1.

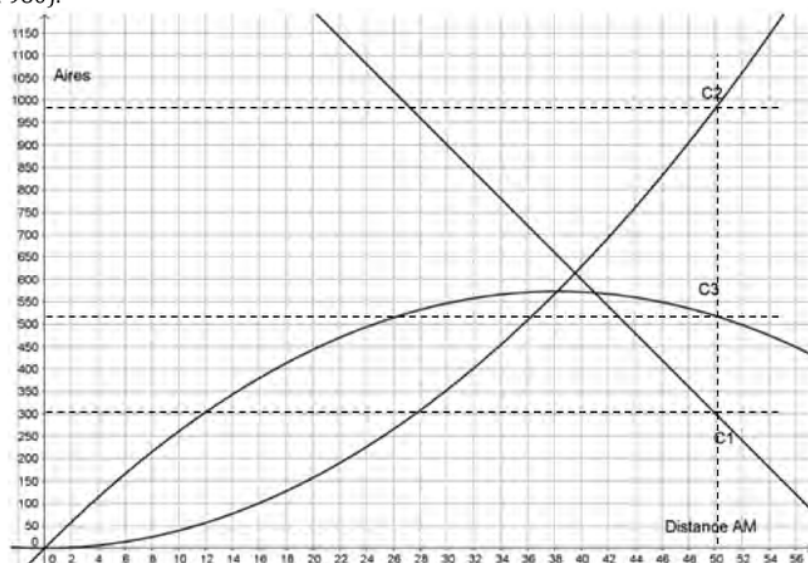
L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre x . Quand x augmente, cette aire augmente. La fonction donnant l'aire de l'espace de plantations florales est donc une fonction croissante. Sa courbe représentative est donc la courbe C2.

La courbe C3, par élimination, est donc la courbe représentant la fonction donnant l'aire de la partie engazonnée.

Méthode 2 :

Les calculs effectués au 2) de la partie A fournissent une valeur approchée de l'image de 50 par les fonctions donnant l'aire de chacune des parties du jardin en fonction de la distance AM. On lit les

ordonnées respectives des points d'abscisse 50 sur chacune des courbes (300, environ 520 et environ 980).



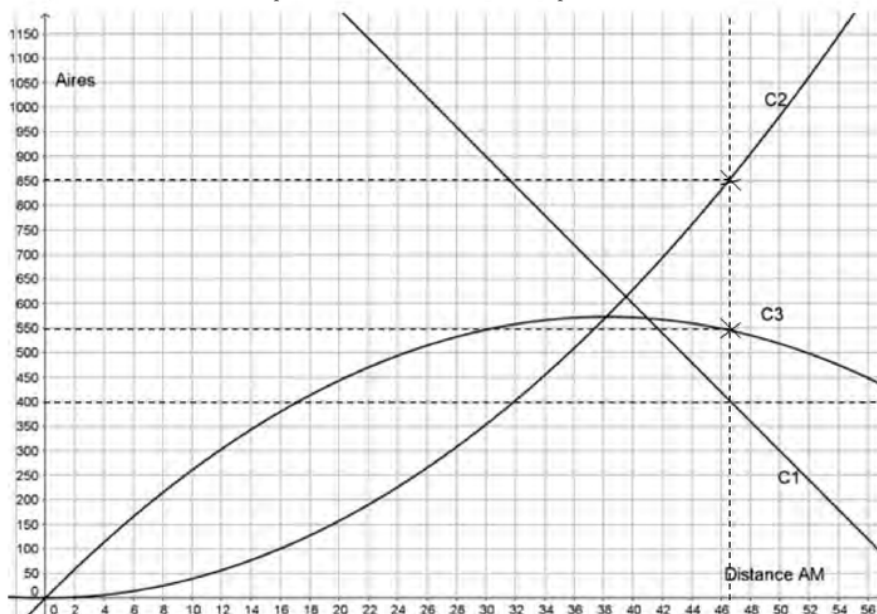
On en déduit que les courbes C1, C2 et C3, représentent respectivement les aires du potager, de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée en fonction de x .

3) b) Point d'intersection des courbes C2 et C3

Le point d'intersection des courbes C2 et C3 a pour ordonnée l'aire commune des deux espaces floral et engazonné. Son abscisse est la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales. Cela signifie que quand x est égal à environ 38 mètres, l'aire de l'espace floral est égale à l'aire de l'espace engazonné, et vaut environ 575 m².

3) c) Valeur approchée des aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée

Pour lire ces valeurs sur le graphique, on repère l'abscisse du point de la courbe C1 qui a pour ordonnée 400. Ensuite, on lit l'ordonnée des points des courbes C2 et C3 qui ont cette abscisse.



Lorsque l'aire du potager vaut 400 m^2 , l'aire de l'espace floral vaut environ 850 m^2 , et l'aire de l'espace engazonné vaut environ 550 m^2 .

4) Calculs d'aires

Lorsque l'aire du potager vaut 750 m^2 , on a $1800 - 30x = 750$

On résout cette équation : $-30x = 750 - 1800$

$$-30x = -1050$$

$$x = \frac{-1050}{-30}$$

$$x = 35.$$

Lorsque l'aire du potager vaut 750 m^2 , x vaut 35 m .

L'aire de l'espace de plantations florales vaut alors $\frac{\pi \times 35^2}{8} \text{ m}^2$ soit $\frac{1225 \pi}{8} \text{ m}^2$;

soit, arrondi au mètre carré, 481 m^2 .

Soit A l'aire de l'espace engazonné :

A = aire du rectangle AMGD – aire de l'espace de plantations florales

$$A = \left(35 \times 30 - \frac{1225\pi}{8} \right) \text{ m}^2$$

$$A \approx 569 \text{ m}^2$$

L'aire de l'espace engazonné vaut alors, arrondie au mètre carré, 569 m^2 .

Remarque :

Il est pertinent de contrôler les résultats obtenus à l'aide des représentations graphiques. On lit l'abscisse du point d'ordonnée 750 sur C_1 : 35.

On lit alors les ordonnées du point d'abscisse 35 sur C_2 puis C_3 avec la précision permise par le graphique.

1) L'affirmation « un adhérent sur six a entre 18 et 25 ans » est VRAIE

Comme les trois quarts des adhérents sont mineurs, un quart des adhérents sont majeurs. Le tiers des adhérents majeurs ont plus de 25 ans, donc les deux tiers des adhérents majeurs ont entre 18 et 25 ans. Les adhérents ayant entre 18 et 25 ans représentent donc les deux tiers du quart des adhérents :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Remarque :

On peut se représenter la situation à l'aide d'une représentation graphique (un tableau ici) "bien choisie". Le partage en quatre doit être aisé pour exprimer les quarts et de même le partage en trois doit également l'être pour exprimer les tiers. On choisit donc un tableau 4 lignes, 3 colonnes.

Adhérents mineurs			Adhérents majeurs
			plus de 25 ans
			moins de 25 ans

Sur le schéma on "lit" $\frac{2}{12}$ et $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2) L'affirmation « durant les soldes, si on baisse un prix d'un article de 30 % puis de 20 % alors ce prix a baissé de 50 % » est FAUSSE

Méthode 1 :

Lorsque l'on baisse le prix de 30 %, on le multiplie par 0,7. Puis quand on le baisse de 20 %, on le multiplie par 0,8. Au final, le prix a été multiplié par $0,7 \times 0,8$ soit 0,56, ce qui correspond à une baisse de 44 %. L'affirmation est fausse.

Rappel :

Soit x un prix initial, le prix après une baisse de $t\%$ est donné par $x - \frac{t}{100}x$ soit $x \left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Après une hausse de $t\%$ le nouveau prix est donné par $x + \frac{t}{100}x$ soit $x \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Méthode 2 :

Prenons un prix de 100 €. Le prix après diminution de 30 % est de 70 €.

Après une baisse de 20 % sur ces 70 €, le nouveau prix est $70 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 70 \times 0,8 = 56$ €.

Une baisse de 50 % sur le prix de 100 € donne un nouveau prix de 50 €.

Les deux prix obtenus diffèrent donc l'affirmation est fausse.

3) L'affirmation « la moyenne de la série ne change pas » est VRAIE

Rappel :

La moyenne d'une série statistique est donnée par :

$$m = \frac{\text{somme des valeurs de la série}}{\text{nombre de valeurs de la série}}$$

Si n est le nombre de valeurs de la série et la moyenne de la série étant 5, la somme des valeurs est égale à $5n$.

Quand on ajoute une valeur supplémentaire égale à 5, la somme des valeurs devient $5n + 5$ et le nombre de valeurs devient $n + 1$. La nouvelle moyenne est alors

$$\frac{5n + 5}{n + 1} = \frac{5(n + 1)}{n + 1} = 5$$

La moyenne ne change pas.

4) L'affirmation « pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit et d'ajouter 1 » est VRAIE

Notons n un nombre entier. Son carré est n^2 .

Si on multiplie le nombre entier qui le précède, $n - 1$, par le nombre entier qui le suit, $n + 1$, et on ajoute 1, on obtient :

$$(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2 - 1^2 + 1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$$

1) Valeur moyenne des précipitations journalières

Il y a 30 valeurs. Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on additionne toutes les valeurs et on divise par le nombre total de valeurs soit 30 :

$$\bar{x} = \frac{4 \times 0 + 6 \times 0,3 + 4 \times 1,3 + 4 \times 1,7 + 3 \times 2,5 + 3 \times 7 + 2 \times 13 + 1 \times 21 + 2 \times 28 + 1 \times 42}{30} \text{ mm}$$

$$\bar{x} \approx 6,2 \text{ mm}$$

La moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, arrondie au dixième de millimètre est égale à 6,2 mm.

2) Calcul de ma médiane

Méthode 1 :

La médiane M d'une série statistique est un nombre tel que la moitié au moins des données du caractère sont inférieures ou égales à M et la moitié au moins sont supérieures ou égales à M.

On cumule les effectifs pour chacune des valeurs : il y a 14 valeurs inférieures ou égales à 1,3 (donc la médiane est supérieure à 1,3) et 18 valeurs inférieures ou égales à 1,7. Il y a 16 valeurs supérieures ou égales à 1,7.

La moitié au moins des valeurs sont inférieures ou égales à 1,7 et la moitié au moins des valeurs sont supérieures ou égales à 1,7 donc **la médiane de la série est 1,7 mm.**

Méthode 2 :

Comme il y a 30 valeurs, rangées par ordre croissant, la médiane est la demi-somme des 15^{ème} et 16^{ème} valeur. Il y a 14 valeurs inférieures ou égales à 1,3. Puis il y a 4 valeurs égales à 1,7. La 15^{ème} valeur et la 16^{ème} valeur valent 1,7.

La médiane est donc 1,7 mm.

L'interprétation de cet indicateur statistique peut se formuler ainsi : durant le mois d'avril, il y a au moins 15 jours durant lesquels les précipitations ont été inférieures ou égales à 1,7 mm et 15 jours durant lesquels les précipitations ont été supérieures ou égales à 1,7 mm.

3) Étendue de la série

L'étendue de la série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

C'est donc **42 mm**.

4) Proportion du nombre de jours de précipitations

Le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 est 2 + 1 + 2 + 1 soit 6.

La proportion que ce nombre de jours représente, **par rapport au nombre de jours dans le mois**, exprimée **en pourcentage**, est égale à :

$$\frac{6}{30} \times 100 \text{ soit } 20 \%$$

5) Volume de pluie

Le volume de pluie tombée sur cette piste est le volume d'un pavé droit, dont la longueur et la largeur sont les dimensions de la piste, et la hauteur est la hauteur cumulée des précipitations du mois.

Ainsi 1 mm = 1 litre/m² car le volume d'un pavé droit d'aire de base 1 m² et de hauteur 10⁻³ m a pour volume 1 m² × 10⁻³ m soit 10⁻³ m³ ou encore 1 L (comme 1 m³ = 1000 L).

La hauteur cumulée des précipitations du mois est 187,3 mm, convertie en mètres : 0,1873 m.

Le volume du pavé droit dont une base est le rectangle correspondant à la piste de décollage est donc égal à : $3200 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 0,1873 \text{ m}$ soit 29968 m^3 .

Sachant que $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$, le volume du pavé droit est $29\,968\,000$ litres.

Le volume de pluie tombée au cours du mois d'avril 2016 est égal à **$29\,968 \text{ m}^3$** ou **$29\,968\,000 \text{ L}$** ou **$2,9968 \times 10^7 \text{ L}$** (ce qui représente environ 30 millions de litres ! ou encore environ 150 000 baignoires de 200 L !)

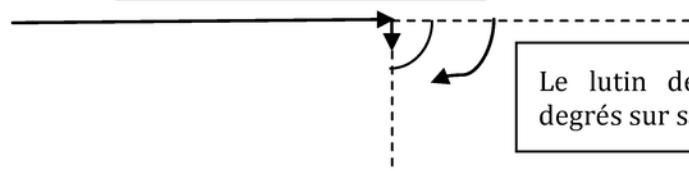
Remarque :

Une hauteur de 1 mm de précipitation correspond à un rapport d'un volume de 1L sur une surface d'aire 1 m^2 (ou équivalent à un litre par mètre carré).

Remarque :

Les programmes fournis dans le sujet sont des scripts obtenus avec le logiciel Scratch¹. Ce logiciel permet, entre autres, de programmer des déplacements de lutins (que l'on peut afficher ou non). Les instructions sont alors relatives au personnage et plus précisément à la direction du lutin.

tourner ↻ de 90 degrés

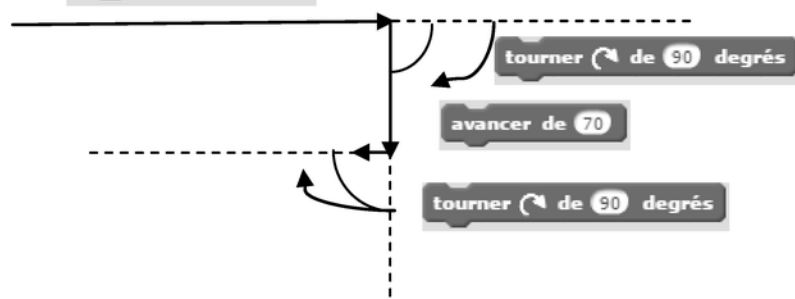


Le lutin de Scratch tourne de 90 degrés sur sa droite.

Le programme A dessine un rectangle de dimensions 300 pixels sur 70 pixels.

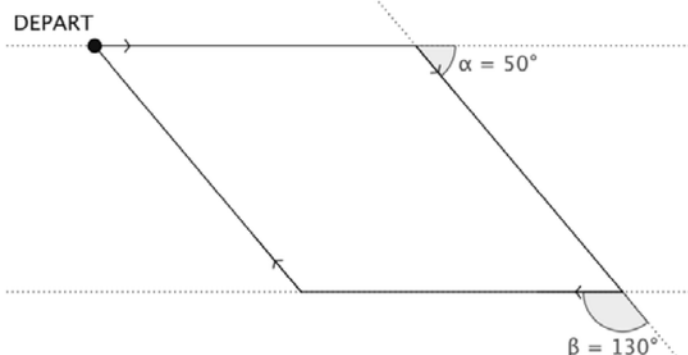
En effet, on peut décomposer le bloc ci-dessous qui est répété deux fois :

avancer de 300



Le lutin de Scratch tourne de 90 degrés sur sa droite, puis avance dans la direction où il se retrouve.

Le programme B dessine un losange de côtés 100 pixels.



1) Distance parcourue pendant la remontée en fonction de n

Pendant la descente, le batelier parcourt 120 km en n jours, donc la distance parcourue quotidiennement, en kilomètre, est $\frac{120}{n}$ avec n entier naturel.

Pour exprimer la distance parcourue lors de la remontée, on peut exploiter la deuxième ou la troisième phrase de l'énoncé.

D'une part, pendant la remontée, la distance parcourue quotidiennement est inférieure de 6 km à celle parcourue pendant la descente. Elle vaut donc, en kilomètre : $\frac{120}{n} - 6$.

D'autre part, comme le batelier met un jour de plus pour remonter que pour descendre, pendant la remontée, le batelier parcourt 120 km en $n + 1$ jours. La distance parcourue pendant la remontée peut donc s'écrire aussi $\frac{120}{n+1}$.

2) Égalité des deux expressions

Les deux expressions obtenues à la question précédente permettent d'obtenir l'égalité demandée :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6.$$

3) Transformation de l'équation

En partant de l'égalité précédente, on obtient successivement :

Résolution 1 :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

$$\frac{120n}{n(n+1)} = \frac{120(n+1)}{n(n+1)} - \frac{6n(n+1)}{n(n+1)}$$

$$120n = 120(n+1) - 6n(n+1)$$

$$20n = 20(n+1) - n(n+1)$$

$$20n = 20n + 20 - n(n+1)$$

$$0 = 20 - n(n+1)$$

$$n(n+1) = 20 \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

Résolution 2 :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

$$\frac{120}{n+1} - \frac{120}{n} = -6$$

$$\frac{120n - 120(n+1)}{(n+1)n} = -6$$

$$\frac{120}{(n+1)n} = 6$$

$$(n+1)n = 20 \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

4) Résolution de l'équation et interprétation du résultat

Travaillant dans l'ensemble des entiers naturels, on déduit de cette égalité que n et $(n+1)$ sont diviseurs de 20.

Les décompositions multiplicatives de 20 en produit de deux facteurs entiers sont : 1×20 ; 2×10 et 4×5 .

La seule qui convient pour $n(n+1)$ est 4×5 , c'est à dire $n = 4$.

Le batelier met 4 jours pour descendre la rivière, et 5 jours pour la remonter.

Remarque :

On aurait pu aussi procéder par essais successifs en parcourant les entiers dans l'ordre croissant (il suffit dans ce cas-là d'aller de $n = 1$ jusqu'à $n = 4$). De même la résolution de l'équation du second degré ($n^2 - n - 20 = 0$) est une méthode qui peut être acceptée même si elle ne relève pas du cycle 4 et donc du programme du concours.