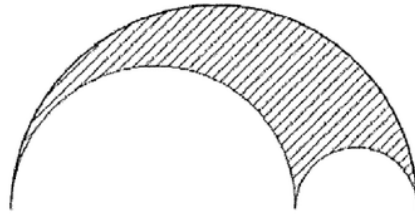


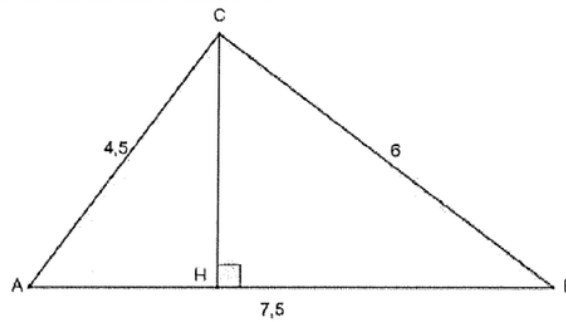
L'arbelos est une figure géométrique qui doit son nom à un outil appelé *tranchet du cordonnier*. Cette figure a été étudiée par Archimède il y a plus de deux millénaires.



## PARTIE A : étude préliminaire – relations métriques dans un triangle rectangle

### 1. Étude d'un cas particulier

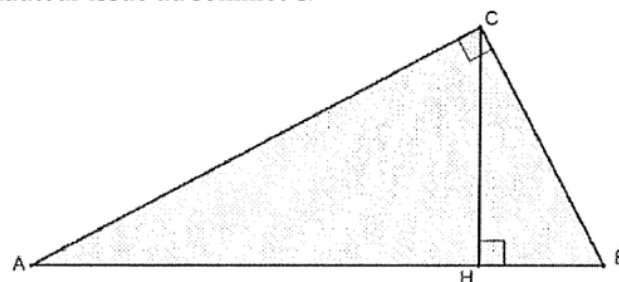
Soit ABC un triangle de dimensions :  $AB = 7,5$  cm ;  $BC = 6$  cm ;  $AC = 4,5$  cm.  
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



- Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à  $13,5 \text{ cm}^2$ .
- En calculant d'une autre façon l'aire du triangle ABC, en déduire que la longueur CH est 3,6 cm.
- Calculer les longueurs AH et BH.
- Vérifier que dans ce triangle  $CH^2 = AH \times BH$ .

### 2. Étude du cas général

Soit ABC un triangle rectangle en C.  
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



- Montrer que les angles  $\widehat{CBH}$  et  $\widehat{ACH}$  ont même mesure.
- En déduire à l'aide des relations trigonométriques que :

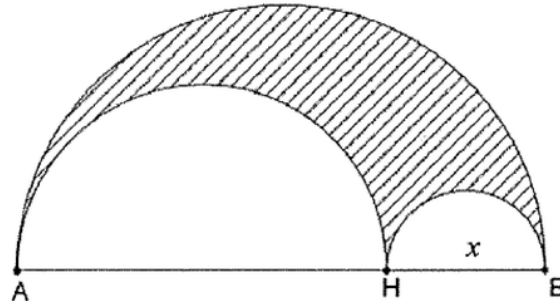
$$\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$$

puis que  $HC^2 = AH \times BH$ .

## PARTIE B : étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

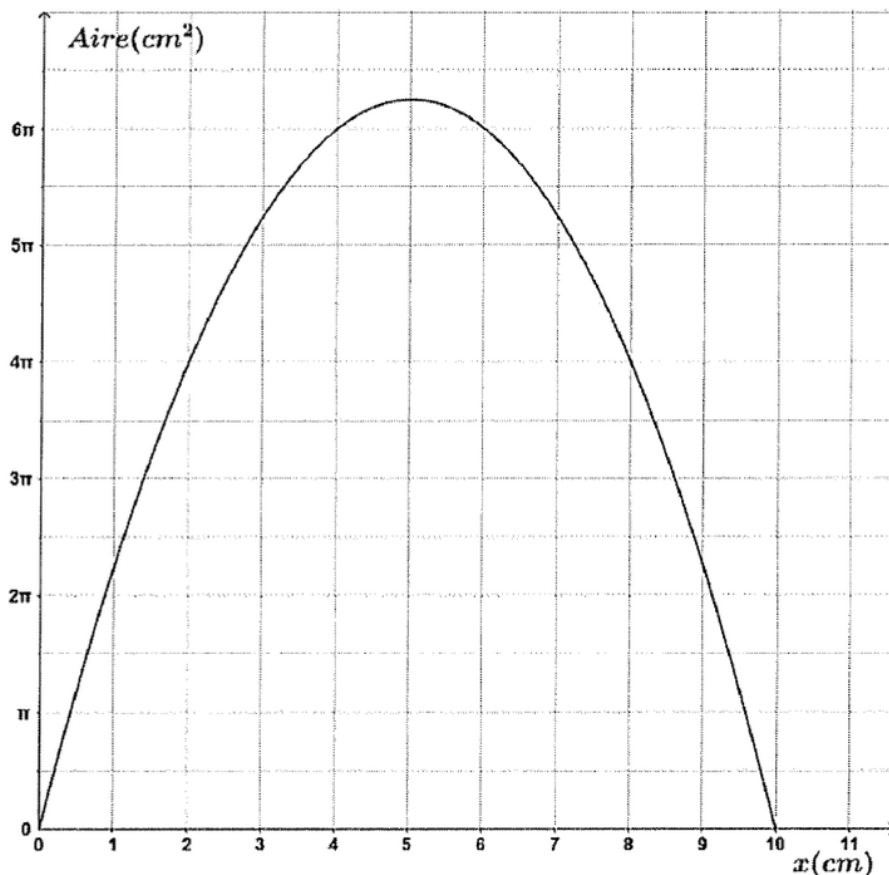
Dans cette partie, on fixe  $AB = 10$  cm.

On considère un point  $H$  appartenant au segment  $[AB]$ , et on note  $x = BH$ .



### 1. Étude graphique de l'aire

La représentation graphique de la fonction  $A$  exprimant l'aire de l'arbelos en fonction de la distance  $BH$  est donnée ci-dessous.



Les réponses aux questions suivantes seront données par lecture graphique.

- Donner en fonction de  $\pi$  l'aire de l'arbelos lorsque  $x = 4$ .
- Pour quelles valeurs de  $BH$  l'aire de l'arbelos est-elle égale à  $2\pi$  cm<sup>2</sup> ?
- Pour quelles valeurs de  $BH$  l'aire est-elle comprise entre 0 et  $4\pi$  cm<sup>2</sup> ?
- Pour quelles valeurs de  $BH$  l'aire de l'arbelos est-elle maximale ?
  - Donner en fonction de  $\pi$  la valeur de cette aire maximale.

## 2. Vérification algébrique

On rappelle que l'aire d'un disque de diamètre  $d$  est égale à  $\frac{1}{4}\pi d^2$ .

- Quelles valeurs  $x$  peut-il prendre ?
- Exprimer l'aire de l'arbelos  $A(x)$  en fonction de  $x$ .
- Montrer que l'on peut écrire :

$$A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2.$$

- Vérifier par le calcul les valeurs déterminées graphiquement pour l'aire maximale à la question **B-1.d**.

## PARTIE C : étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

On donne deux points distincts A et B. On construit un demi-cercle de diamètre [AB].

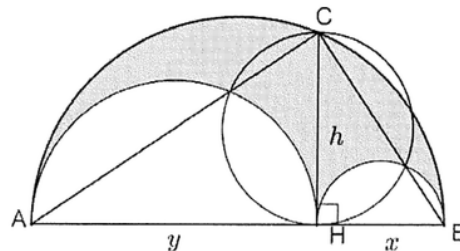
Soit C un point de ce demi-cercle distinct de A et B.

On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

On construit les deux demi-cercles de diamètre [AH] et [HB] situés dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.

On note  $x$  la longueur BH,  $y$  la longueur AH et  $h$  la longueur CH.

L'arbelos est la zone du plan grisé sur la figure.



- Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à

$$\frac{\pi}{4}xy.$$

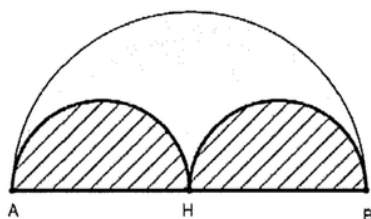
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
- Utiliser la relation métrique établie à la question **A-2.b** pour montrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [CH].

## PARTIE D : prolongements

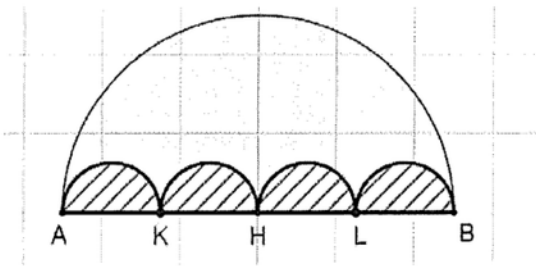
Dans cette partie, le segment [AB] mesure 10 cm. On le partage en  $n$  segments d'égale longueur,  $n$  étant un entier naturel non nul, puis on construit  $n$  demi-disques de diamètres ces  $n$  segments comme indiqué dans les exemples ci-dessous.

On s'intéresse au périmètre et à l'aire des figures formées de ces  $n$  demi-disques, délimitées par le diamètre [AB] et les  $n$  demi-cercles (hachurées dans les deux exemples ci-dessous).

Pour  $n = 2$



Pour  $n = 4$



1. Dans le cas où  $n = 2$ , vérifier que le périmètre de la partie hachurée est égal à  $5\pi + 10$  cm et que son aire est égale à  $6,25\pi$  cm<sup>2</sup>.
2. Déterminer les valeurs exactes du périmètre puis de l'aire de la partie hachurée dans le cas où  $n = 4$ .
3. Étude du cas général
  - a) Montrer que le périmètre de la surface hachurée est le même quelle que soit la valeur de  $n$ .
  - b) Montrer que l'aire de la surface hachurée est égale à  $\frac{25\pi}{2n}$  cm<sup>2</sup>.
4. Trouver la plus petite valeur de  $n$  pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 0,1 cm<sup>2</sup>. Combien mesure le périmètre pour cette valeur de  $n$  ?

1. On lance un dé bien équilibré et on considère les points portés sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de points ?
2. On lance deux dés bien équilibrés et on effectue la somme des points portés sur les faces supérieures. Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?
3. On considère un sac contenant 25 jetons rouges et 17 jetons bleus indiscernables au toucher. On tire deux jetons l'un après l'autre, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur ?

Louise affirme que si on augmente la longueur du côté d'un carré de 100 % alors son aire augmente de 200 %.

Tessa n'est pas d'accord avec elle et affirme que l'aire sera doublée.

Eva soutient, quant à elle, que l'aire augmentera de 300 %.

Qui a raison ? Justifier la réponse.

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 9.
- Afficher le résultat.

1. a) Monter que si le nombre de départ est 5, le résultat affiché sera 64.

b) Quel nombre sera affiché si le nombre choisi au départ est 10 ?

Un tableur a été utilisé pour mettre en œuvre ce programme de calcul. Une copie de l'écran est donnée ci-dessous.

|   | A                       | B  | C  | D  | E | F  | G  | H  |
|---|-------------------------|----|----|----|---|----|----|----|
| 1 | <i>nombre de départ</i> | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3  |
| 2 | <i>résultat</i>         | 0  | 1  | 4  | 9 | 16 | 25 | 36 |

2. Une formule a été saisie dans la cellule B2 et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage C2 : H2.

Parmi les formules suivantes, laquelle a été saisie ?

$$= B1+6*B1+9$$

$$= (B1+6)*(B1+9)$$

$$= (B1+6)*B1+9$$

3. En observant la copie d'écran ci-dessus, émettre une conjecture sur le résultat obtenu en fonction du nombre de départ choisi.

4. Démontrer cette conjecture.



Un producteur de légumes sème des carottes sur deux parcelles différentes.

Pour répondre aux demandes de l'industrie agroalimentaire, les carottes doivent respecter certains calibrages.

On s'intéresse tout particulièrement à la longueur des carottes.

Après récolte, le producteur prélève un échantillon sur chacune des deux parcelles. Les résultats des mesures des longueurs des carottes de ces échantillons sont regroupés ci-dessous :

| Parcelle A (400 carottes)  | Parcelle B (500 carottes) |
|----------------------------|---------------------------|
| premier quartile : 7 cm    | premier quartile : 7 cm   |
| troisième quartile : 12 cm | troisième quartile : 9 cm |
| médiane : 10 cm            | médiane : 8,5 cm          |
| moyenne : 9,5 cm           | moyenne : 8,8 cm          |
| étendue : 9 cm             | étendue : 10 cm           |
| minimum : 4,5 cm           | minimum : 5 cm            |

Dans cet exercice, il s'agit de dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et de le justifier.

#### Affirmation 1

Au moins 75 % des carottes de l'échantillon prélevé sur la parcelle B mesurent moins de 10 cm.

#### Affirmation 2

La plus grande carotte de l'échantillon prélevé sur la parcelle A mesure 14 cm.

Pour les deux affirmations suivantes, on considère que le producteur regroupe les échantillons des deux parcelles.

#### Affirmation 3

La longueur moyenne d'une carotte est 9,15 cm.

#### Affirmation 4

La valeur médiane des longueurs des carottes est 6,9 cm.