

A. Questions préliminaires

1. Longueur de [BC]

Les droites (AB) et (AC) étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore dans ce triangle on a :

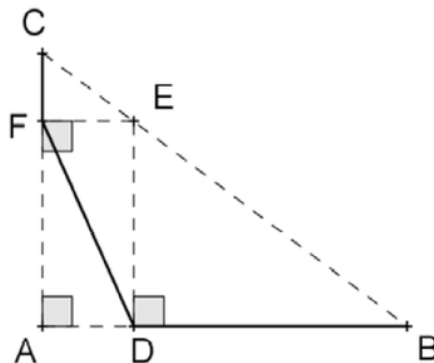
$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2.$$

$$BC^2 = 100.$$

$$BC = 10.$$

La longueur BC est égale à 10 cm.



Remarque :

Il s'agit d'un résultat bien connu : une unité de longueur étant choisie, pour un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit ont pour mesures 6 et 8, la mesure de la longueur de l'hypoténuse est 10. Il s'agit du triplet Pythagoricien (6 ; 8 ; 10).

2. Une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à l'unité

Remarque :

Nous connaissons les longueurs des trois côtés du triangle rectangle ABC. Il est donc possible de calculer par l'utilisation du cosinus, du sinus ou de la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ une mesure de cet angle. Nous utiliserons ici, par exemple, le cosinus.

Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10}.$$

On en déduit que $\widehat{ABC} \approx 37^\circ$.

L'angle $\widehat{ABC}$ vaut environ 37° .

3. Égalité $AE = DF$

Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Le point D appartient à [AB] et le point F appartient à [AC].

Donc (AD) et (AF) sont perpendiculaires.

De même, les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires ainsi que (AF) et (FE).

Le quadrilatère ADEF a donc trois angles droits. C'est un rectangle.

Or un rectangle a ses diagonales de même longueur.

On en déduit que $AE = DF$.

B. Étude analytique du problème

1. Cas particulier : $AD = 3$ cm

1.a) Longueurs BD et DE

Le point D appartient à [AB], donc les points A, D et B sont alignés dans cet ordre.

On a donc : $AD + DB = AB$. Soit $DB = 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

La longueur BD est égale à 5 cm.

Méthode 1 : utilisation du théorème de Thalès

Les droites (ED) et (AC) sont perpendiculaires à (AB) d'après la partie A. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. Donc (ED) et (AC) sont parallèles.

On est donc dans une configuration d'utilisation du théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{5}{8} = \frac{DE}{6}.$$

On en déduit que :

$$DE = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

La longueur DE est égale à $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

Méthode 2 : utilisation des formules trigonométriques

Les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires (cf partie A) donc le triangle BDE est rectangle en D.

De plus, comme D appartient à [AB] et E à [BC], l'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'angle $\widehat{DBE}$.

Donc : $\tan \widehat{DBE} = \tan \widehat{ABC}$.

Or dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8}.$$

Et dans le triangle rectangle BDE, on a :

$$\tan \widehat{DBE} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{5}.$$

$$\text{Donc } \frac{DE}{5} = \frac{6}{8} \quad \text{soit} \quad DE = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

La longueur DE est égale à $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

$$1.b) DF = \sqrt{23,0625} \text{ cm}$$

L'angle $\widehat{DAF}$ est un angle droit (cf partie A), donc le triangle DAF est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DA^2 + FA^2.$$

$$DF^2 = (3)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 9 + \frac{225}{16} = \frac{144 + 225}{16} = \frac{369}{16} = 23,0625.$$

Donc $DF = \sqrt{23,0625} \text{ cm}$.

La longueur DF est égale à $\sqrt{23,0625} \text{ cm}$.

2. Cas général où $AD = x$

2.a) Valeurs possibles pour x

Le segment [AB] a une longueur de 8 cm. La longueur AD étant positive et le point D étant distinct de A et B sur le segment [AB], on a : $0 < x < 8$.

X peut donc prendre toute valeur comprise entre 0 et 8.

2.b) Démonstration de l'égalité $DE = 6 - 0,75x$

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre, donc $AD + DB = AB$. Soit $DB = AB - AD = 8 - x$.

On peut alors utiliser les mêmes raisonnements que pour la question 1.a).

Méthode 1 : utilisation du théorème de Thalès

Les droites (ED) et (AC) sont perpendiculaires à (AB) d'après la partie A. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. Donc (ED) et (AC) sont parallèles.

On est donc dans une configuration d'utilisation du théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{8-x}{8} = \frac{DE}{6}.$$

$$DE = \frac{48-6x}{8} = 6 - 0,75x.$$

La longueur DE est égale à $6 - 0,75x$ cm.

Méthode 2 : utilisation des formules trigonométriques

Les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires (cf partie A) donc le triangle BDE est rectangle en D.

Comme $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$, on a : $\tan \widehat{DBE} = \tan \widehat{ABC}$.

Or dans le triangle rectangle ABC : $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8}$.

Et dans le triangle rectangle BDE : $\tan \widehat{DBE} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{8-x}$.

Donc $\frac{DE}{8-x} = \frac{6}{8}$ soit : $DE = \frac{48-6x}{8} = 6 - 0,75x$.

La longueur DE est égale à $6 - 0,75x$ cm.

2.c) Égalité $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$

Le quadrilatère ADEF est un rectangle (cf. partie A), donc ses côtés opposés sont de même longueur.

Comme $AD = x$, on en déduit que $EF = x$.

Dans le rectangle ADEF (cf partie A), l'angle $\widehat{DEF}$ est un angle droit, donc le triangle DAF est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DE^2 + EF^2.$$

$$DF^2 = (6 - 0,75x)^2 + (x)^2 = 36 - 9x + 0,5625x^2 + x^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36.$$

On en déduit que $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$.

2.d) Vérification du résultat de la question 1.b)

Pour la question 1.b), $AD = 3$ cm, donc x va prendre la valeur 3.

Or d'après la question 2.c, on a : $DF^2 = 1,5625 \times (3)^2 - 9 \times 3 + 36 = 14,0625 - 27 + 36 = 23,0625$.

La longueur DE est donc bien égale à $\sqrt{23,0625}$ cm.

3.a) Formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage la colonne B

Pour répondre à cette question, il faut comprendre que les nombres de la colonne B s'obtiennent à partir des valeurs de la colonne A et que les premières valeurs de x données dans la colonne A sont dans la cellule A2. Ainsi voici la réponse à la question posée.

Propositions	Réponse
Proposition 1 : $= 1,5625*0^2-9*0+36$	Faux. Cette formule permet de calculer une seule valeur (cellule B2) car il n'y a pas de référence à la cellule A2.
Proposition 2 : $= 1,5625*A2^2-9*A2+36$	Correct.
Proposition 3 : $= 1,5625*x^2-9*x+36$	Faux. Pas de référence à la cellule A2.
Proposition 4 : $= 1,5625*A1^2-9*A1+36$	Faux. Erreur de cellule de référence (A1 au lieu de A2).

3.b) Explication du choix de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau

La lecture du tableau 1 (voir sujet en page 34) fait apparaître que la valeur de DF^2 décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,5 et 3,5, puis se met à croître ensuite.

7	2,5	23,2656
8	3	23,0625
9	3,5	23,6406

Il est donc nécessaire de trouver plus finement où la valeur minimale se trouve en prenant les valeurs de x comprises entre 2,5 et 3,5.

C'est pour cette raison que l'utilisateur a choisi de poursuivre avec les valeurs comprises entre 2,5 et 3,5.

3.c) Encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal

La lecture du tableau 2 (voir sujet en page 35) fait apparaître, à l'aide des colonnes D et E, que la fonction décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,8 et 3.

La lecture des colonnes G et H montre que la fonction décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,87 et 2,89. Elle prend en effet successivement les valeurs 23,0402 puis 23,0400 puis 23,0402 pour les nombres 2,87 puis 2,88 puis 2,89.

On peut donc en déduire que la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimale est comprise entre 2,87 et 2,89 ce qui correspond à un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x .

D	E	F	G	H
x	DF^2		x	DF^2
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

C. Résolution du problème par une méthode géométrique

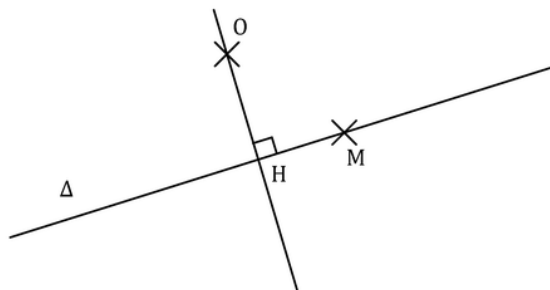
1. Justification de l'inégalité $OH < OM$

Le point H est à l'intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O.

Les points O, H et M sont trois points distincts.

Comme ces trois points sont portés par deux droites perpendiculaires, le triangle OHM est un triangle non aplati, qui est rectangle en H.

On en déduit que la longueur de son hypoténuse est supérieure à la longueur des deux autres côtés, soit $OH < OM$.



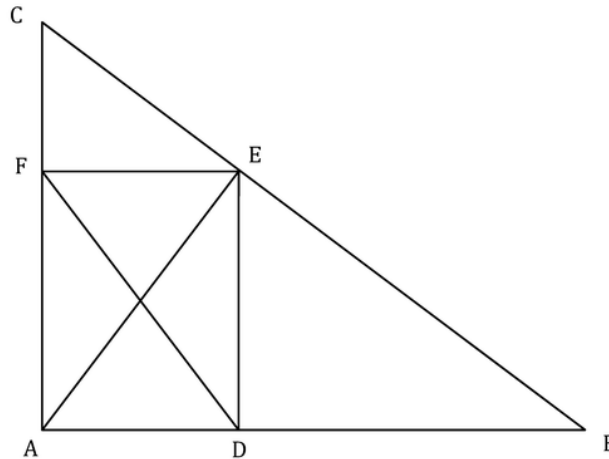
Autre méthode : utilisation de la définition de la distance d'un point à une droite

Le point H est à l'intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O. Donc la distance du point O à la droite Δ est égale à la distance OH. Le point M appartient à la droite Δ mais est distinct de H,

donc la distance OM est strictement supérieure à la distance entre le point O et la droite Δ . On en déduit que : $OH < OM$.

2.a) Construction du triangle ABC

Pour obtenir le point E sur [BC] qui a une distance AE minimale, il faut placer le point E de telle sorte que (AE) soit perpendiculaire à (BC).



Remarque :

Aucun outil n'est précisé dans l'énoncé. Il est donc possible de faire la construction avec l'équerre, qui est la méthode la plus simple. La construction avec règle et compas est elle aussi possible mais plus longue.

2.b) Détermination des longueurs AE et DF

Dans le triangle ABC, [AE] est une hauteur relativement à la base [BC] car les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires (question 2.a). On peut donc calculer l'aire du triangle ABC par la formule :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{BC \times AE}{2} = \frac{10 \times AE}{2} = 5 \times AE.$$

Le triangle rectangle ABC peut aussi être considéré comme un demi-rectangle et donc on peut calculer son aire comme étant la moitié de l'aire du rectangle :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24.$$

$$\text{Donc : } 5 \times AE = 24 \text{ et } AE = \frac{24}{5} = 4,8.$$

On a donc : **AE = 4,8 cm.**

Dans le rectangle ADEF les diagonales sont de même longueur.

On en déduit que DF = 4,8 cm.

2.c) Calcul de la distance AD et conclusion par rapport au problème de départ

Méthode 1 : utilisation des formules trigonométriques

Le point D appartient à [AB] donc les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EAD}$ sont égaux.

$$\text{Or dans le triangle EAB rectangle en E (cf. 2.a)), on a : } \cos \widehat{EAB} = \frac{AE}{AB} = \frac{4,8}{8}.$$

$$\text{Et dans le triangle EAD rectangle en D (car ADEF est un rectangle), on a : } \cos \widehat{EAD} = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{4,8}.$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{4,8}{8} = \frac{AD}{4,8} \text{ soit } AD = \frac{4,8 \times 4,8}{8} = 2,88.$$

Ainsi la longueur AD est égale à 2,88 cm.

Méthode 2 : utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès

Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'application du théorème de Pythagore fournit l'égalité suivante :

$$AE^2 + EB^2 = AB^2.$$

$$\text{Soit : } 4,8^2 + EB^2 = 8^2.$$

$$\text{Soit : } EB^2 = 64 - 23,04 = 40,96.$$

La longueur EB est donc égale à 6,4 cm.

Or les droites (ED) et (AC) sont parallèles (car elles sont portées par les côtés opposés du rectangle ADEF) et les points B, E, C et B, D, A sont alignés dans cet ordre.

L'application du théorème de Thalès donne l'égalité suivante :

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \quad \text{soit} \quad \frac{6,4}{10} = \frac{BD}{8} \quad \text{et donc} \quad BD = \frac{8 \times 6,4}{10} = 5,12.$$

La longueur BD est donc égale à 5,12 cm.

Comme A, D et B sont alignés dans cet ordre, on en déduit que $AD = AB - BD = 8 \text{ cm} - 5,12 \text{ cm} = 2,88 \text{ cm}$.

Ainsi la longueur AD mesure 2,88 cm.

Pour conclure au problème posé, il faut donc placer le point D sur le segment [AB] tel que $AD = 2,88 \text{ cm}$ et ainsi la longueur DF sera minimale.

1. Durée nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre

Remarque :

Nous avons remplacé "temps nécessaire à un signal lumineux..." par la formulation plus rigoureuse "durée nécessaire à un signal lumineux...".

La vitesse de la lumière dans le vide étant exprimée en m/s, exprimons 1UA en mètres :

$$1\text{UA} = 150 \times 10^6 \times 10^3 \text{ m} = 15 \times 10^{10} \text{ m}.$$

A partir de la relation $\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{durée}}$, on obtient :

$$\text{durée} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{15 \times 10^{10} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5 \times 100 \text{ s} = 500 \text{ s}.$$

La durée est donc de 500 s qui est égal à $8 \times 60 \text{ s} + 20 \text{ s}$, c'est à dire à 8 min 20 s.

La durée nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide est de 8 min 20 s.

2. Valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière

La vitesse de la lumière dans le vide est de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Cela signifie que la lumière parcourt dans le vide une distance de $3 \times 10^8 \text{ mètres}$ en une seconde.

Méthode 1 : utilisation de la mesure de la vitesse en m/s

Une année-lumière est donc la distance de cette lumière, parcourue dans le vide pendant 365,25 jours.

Une journée contient $24 \times 60 \times 60 \text{ s}$, soit 86 400 s. On en déduit la valeur d'une AL (année lumière) :

$$1\text{AL} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 86\,400 \text{ s} \times 365,25 = 94\,672\,800 \times 10^8 \text{ m} = 946\,728 \times 10^7 \text{ km} = 9\,467,28 \times 10^9 \text{ km}$$

soit 9 467,28 milliards de kilomètres.

Une année-lumière est donc une longueur de 9 467,28 milliards de kilomètres.

Méthode 2 : utilisation de la mesure de la vitesse en km/h

La vitesse de la lumière dans le vide est de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

En ramenant cette vitesse en km/s, on obtient $3 \times 10^5 \text{ km/s}$ puisque $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$.

Puis, sachant que $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$, on obtient la vitesse en km/h : $3 \times 3\,600 \times 10^5 \text{ km/h} = 10\,800 \times 10^5 \text{ km/h}$.

Ainsi la vitesse de la lumière dans le vide est de 108×10^7 km/h.

Une année lumière est donc la distance que cette lumière parcourt dans le vide pendant 365,25 jours.

Une journée contient 24 heures. On en déduit la valeur d'une AL (année lumière) :

$1AL = 108 \times 10^7 \text{ km/h} \times 24 \text{ h} \times 365,25 = 946\,728 \times 10^7 \text{ km}$ ou $9\,467,28 \times 10^9 \text{ km}$ soit 9 467,28 milliards de kilomètres.

Une année lumière a donc une longueur de 9 467,28 milliards de kilomètres.

Remarque :

Les calculs permettent d'obtenir une valeur exacte en kilomètres. Or il est demandé dans le sujet une valeur approchée, sans aucune indication de précision. Différentes réponses sont donc possibles comme par exemple 9467 milliards de kilomètres. Il est aussi possible de conclure en donnant l'écriture scientifique suivante : $9,5 \times 10^{12} \text{ km}$.

3. a) Distance Neptune-Soleil en UA

La distance moyenne Neptune - Soleil est de 4,5 milliards de kilomètres soit $4,5 \times 10^9 \text{ km}$ ou encore $45 \times 10^8 \text{ km}$.

Une UA vaut $15 \times 10^7 \text{ km}$.

Or $45 \times 10^8 = 30 \times (15 \times 10^7)$.

On en déduit que la distance moyenne Neptune-Soleil est de 30 UA.

3. b) Distance Terre - Soleil sur la maquette

Les dimensions de la maquette sont proportionnelles aux dimensions réelles. Ainsi on peut écrire :

	Distance Terre-Soleil	Distance Neptune-Soleil
Distance réelle (en UA)	1	30
Dimensions sur la maquette (en m)	d	1

Le calcul de la quatrième proportionnelle permet d'écrire : $30 \times d = 1$ soit que $d = \frac{1}{30} \text{ m}$.

Sur la maquette, il faudrait donc placer la Terre à $\frac{1}{30}$ de mètre, soit à environ 33 mm.

Affirmation 1 : « Cette bouteille vide pèse alors 465 g. » est vraie

Méthode 1 : démarche arithmétique

La bouteille pleine pèse 1 215 g, donc la masse de la bouteille vide plus la masse de l'eau qu'elle contient pleine est de 1 215 g.

La bouteille à moitié pleine pèse 840 g, donc la masse de la bouteille vide plus la moitié de l'eau de la bouteille pleine est de 840 g.

La différence de ces deux masses donne la masse de la moitié de l'eau contenue dans une bouteille pleine c'est à dire 375 g car $1\,215 - 840 = 375$.

On en déduit la masse la bouteille vide à partir de la deuxième information : $840 - 375 = 465$.

Ainsi la masse de la bouteille vide est de 465 g.

Méthode 2 : démarche algébrique avec deux inconnues

On peut résoudre aussi ce problème par un système de deux équations à deux inconnues.

On note b , la mesure de la masse de la bouteille vide et e la mesure de la masse d'eau dans la bouteille pleine, l'unité de masse étant le g.

Les informations données permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} b + e = 1215 \\ b + \frac{e}{2} = 840 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b + e = 1215 \\ \frac{e}{2} = 1215 - 840 = 375 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b + e = 1215 \\ b = 840 - \frac{e}{2} = 840 - 375 = 465 \end{cases}$$

Ainsi la masse de la bouteille vide est de 465 g.

Méthode 3 : démarche algébrique avec une inconnue

On peut résoudre aussi ce problème par une équation à une seule inconnue.

On note x , la mesure (en g) de la masse de la bouteille vide.

La mesure (en g) de la masse d'eau dans la bouteille vide est exprimé par $1215 - x$.

La mesure (en g) de la masse de la bouteille à moitié vide peut alors être exprimée ainsi :

$$\frac{1215 - x}{2} + x = 840.$$

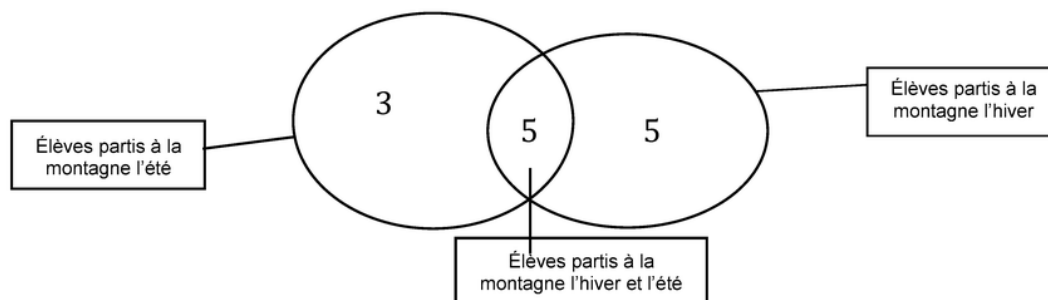
$$\text{D'où } 607,5 - \frac{x}{2} + x = 840 \quad \text{d'où } \frac{x}{2} = 232,5 \quad \text{soit } x = 465.$$

Ainsi la masse de la bouteille vide est de 465 g.

Affirmation 2 : « 12 élèves de cette classe ne sont pas partis en vacances à la montagne (ni l'hiver, ni l'été). » est vraie

Méthode 1 : représentation par un diagramme de Venn

On commence par remplir l'intersection commune à ces deux ensembles : 5 enfants sont partis à la montagne à la fois l'été et l'hiver et ensuite on complète chacun des ensembles par le nombre d'enfants nécessaire pour obtenir les effectifs proposés dans le texte.



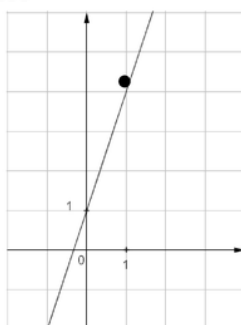
On en déduit que seulement $5 + 5 + 3$, soit 13 élèves sont partis à la montagne et donc que $25 - 13$, soit **12 élèves ne sont pas partis à la montagne (ni en hiver, ni en été).**

Méthode 2 : par raisonnement arithmétique

Si 5 élèves sont partis à la montagne l'hiver et l'été, cela fait que parmi les 10 élèves partis en hiver, il y en a $10 - 5$, soit 5 qui ne sont partis que l'hiver. De même, cela fait que parmi les 8 élèves partis en été, il y en a $8 - 5$, c'est-à-dire 3 qui ne sont partis à la montagne que l'été.

On en déduit que seulement $5 + 5 + 3$, soit 13 élèves sont partis à la montagne et donc que $25 - 13$, soit **12 élèves ne sont pas partis à la montagne (ni en hiver, ni en été).**

Affirmation 3 : « La droite ci-dessous, dans un repère orthogonal, représente la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 1$ » est fausse



En prenant, par exemple, le point de coordonnées $(1 ; 4)$ qui appartient à la droite sur le graphique, on constate que les coordonnées de ce point ne vérifient pas la relation $f(x) = -3x + 1$.
En effet $-3 \times 1 + 1 = -2$ et non pas 4.

Donc la droite représentée sur le graphique n'est pas la représentation de la fonction affine $f(x) = -3x + 1$.

Affirmation 4 : « Le PGCD de 2016 et de 6102 est 2. » est fausse

Méthode 1 : recherche d'un contre-exemple

En effet les nombres 2016 et 6102 sont respectivement divisibles par 9, puisque la somme de leurs chiffres respectifs est divisible par 9.
9 est un diviseur plus grand que 2 donc le **PGCD de ces deux nombres n'est pas 2.**

Méthode 2 : calcul du PGCD de 2016 et 6102

La décomposition de 2016 donne : $2016 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

La décomposition de 6102 donne : $6102 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 113$.

On en déduit que le PGCD de 2016 et 6102 est : $2 \times 3 \times 3 = 18$.

Donc le PGCD de ces deux nombres n'est pas 2.

1. a) Nombre obtenu si le nombre de départ est 2

En appliquant le programme de calcul au nombre 2, on obtient :

$$(2 \times 4 + 7)^2 = (8 + 7)^2 = 15^2 = 225.$$

Ainsi si le nombre de départ est 2, le nombre obtenu par le programme de calcul est 225.

1) b) Nombre obtenu si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$

En appliquant le programme de calcul au nombre $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} \times 4 + 7\right)^2 = (2 + 7)^2 = 9^2 = 81.$$

Ainsi si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$, le nombre obtenu par le programme de calcul est 81.

2. Formule donnant le nombre obtenu pour un nombre de départ a

En appliquant le programme de calcul au nombre a , on obtient :

$(a \times 4 + 7)^2 = (4a)^2 + 2 \times 4 \times 7 \times a + 7^2$ qui est une identité remarquable qui lorsqu'elle est développée donne : $16a^2 + 56a + 49$.

Remarque :

On peut évidemment retrouver ce résultat en développant par une double distributivité l'expression $(a \times 4 + 7)^2$, ce qui donne : $(a \times 4 + 7)^2 = (a \times 4 + 7) \times (a \times 4 + 7) = 16a^2 + 56a + 49$.

Ainsi si le nombre de départ est a , le nombre obtenu par le programme de calcul est donné par l'expression : $16a^2 + 56a + 49$.

3. a) Nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0

On cherche le nombre a tel que $(a \times 4 + 7)^2 = 0$.

Pour que cette égalité soit vraie il faut que $(a \times 4 + 7)$ soit égal à 0. On en déduit que $a = \frac{-7}{4}$.

Il existe un nombre et un seul, $a = \frac{-7}{4}$, pour que le résultat du programme de calcul soit égal à 0.

3. b) Nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 49

On cherche le nombre a tel que $(a \times 4 + 7)^2 = 49$.

Pour cela, on va utiliser la forme développée de l'expression $(a \times 4 + 7)^2$ calculée en à la question 2.

L'équation $(a \times 4 + 7)^2 = 49$ peut donc être remplacée par l'équation $16a^2 + 56a + 49 = 49$.

Celle-ci est équivalente à l'équation $16a^2 + 56a = 0$, soit encore $4 \times a(4a + 14) = 0$.

Le produit de deux nombres est nul si et seulement l'un des deux nombres est nul.

Ainsi on a deux cas possibles : $4 \times a = 0$ ou $4a + 14 = 0$.

On en déduit deux valeurs possibles pour a : $a = 0$ ou $a = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}$.

Il existe donc deux nombres, 0 et $\frac{-7}{2}$, que l'on peut choisir au départ pour que le résultat du programme de calcul soit égal à 49.

3. c) Nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à -1

On cherche le nombre a tel que $(a \times 4 + 7)^2 = -1$.

Tout nombre élevé au carré est positif. Ici l'expression $(a \times 4 + 7)^2$ est le carré d'un nombre et, quelle que soit la valeur de a , donnera une valeur positive donc ne pourra jamais être égale à -1.

Il n'existe donc pas de nombre tel que le résultat du programme de calcul soit égal à -1.