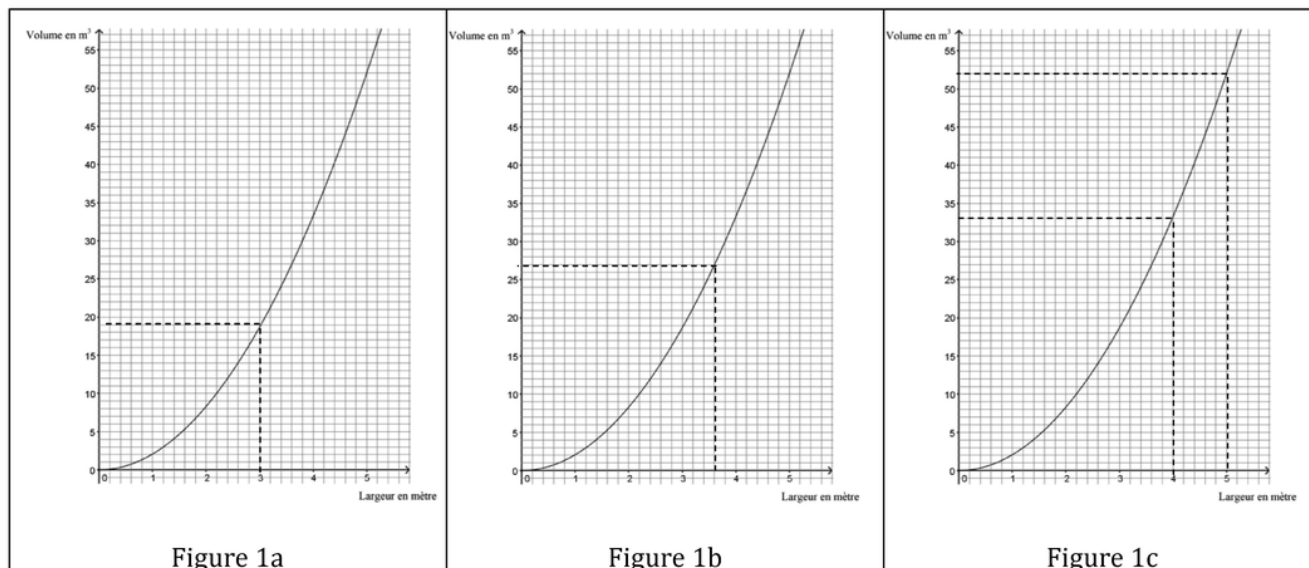


A. Volume de la piscine

1. Étude graphique



1. a) Volume de la piscine pour une largeur de 3 m

Si la largeur est égale à 3 m, le volume de la piscine est d'environ 19 m^3 , au mètre cube près.

Figure 1a : arrondie à l'unité, 19 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3.

1. b) Largeur de la piscine pour un volume de 27 m^3

Si le volume de la piscine est de 27 m^3 , sa largeur est d'environ 3,6 m, au dixième de mètre près.

Figure 1b : arrondie au dixième, 3,6 est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 27.

1. c) Encadrement du volume de la piscine pour une largeur comprise entre 4 m et 5 m

Si la largeur de la piscine est comprise entre 4 m et 5 m, son volume est compris entre environ 33 m^3 et environ 52 m^3 .

Figure 1c : l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 est environ 33 ; l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 5 est environ 52 ; les ordonnées des points de la courbe dont les abscisses sont comprises entre 4 et 5 sont comprises entre 33 et 52.

2. Étude algébrique

2. a) Expression du volume de la piscine en fonction de la largeur de la piscine

Quelle que soit sa largeur, la piscine a la forme d'un prisme droit dont les bases sont les trapèzes ABCD et EFGH, et dont une hauteur est le segment [AE] ; son volume est donc égal à l'aire de sa base EFGH multipliée par sa largeur AE.

- AE est la largeur de la piscine, soit $AE = x \text{ m}$;
- EFGH est un trapèze rectangle en E et H, de petite base $EF = 1,10 \text{ m}$, de grande base $HG = 1,50 \text{ m}$ et de hauteur EH.

EH est la longueur de la piscine, égale à 1,6 fois sa largeur AE, donc $EH = 1,6 x \text{ m}$.

Ainsi,

$$\text{Aire (EFGH)} = \frac{(EF + HG) \times EH}{2} = \frac{(1,1 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) \times 1,6 x \text{ m}}{2} = \frac{2,6 \text{ m} \times 1,6 x \text{ m}}{2} = 2,08 x \text{ m}^2.$$

Le volume de la piscine est égal à $\text{Aire (EFGH)} \times AE$.

Par conséquent, si on note $V(x)$ la mesure du volume de la piscine, avec le m^3 pour unité, on a, quel que soit x , $V(x) = 2,08 x \times x = 2,08 x^2$.

Ainsi, la mesure du volume de la piscine exprimée en mètre cube est donnée par la formule :

$$V(x) = 2,08 x^2.$$

2. b) Calcul de la largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3

On cherche x tel que $V(x) = 52$, soit $2,08 x^2 = 52$, ce qui équivaut à $x^2 = \frac{52}{2,08}$, soit $x^2 = 25$.

Or x est un nombre positif, donc $x = 5$.

La largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3 est donc de 5 m.

B. Mise en eau

1. a) Contenance en eau de la piscine pour un niveau d'eau à 10 cm du bord

Méthode 1 : par différence de volumes

D'après la question précédente, pour une largeur de 5 m et une longueur de 8 m, la piscine a un volume de 52 m^3 . (On peut s'appuyer sur la question A.2.a en calculant $V(5)$ ou se référer à la question A.2.b)

On enlève à ce volume celui du pavé droit ADHEA'D'H'E', de largeur 5 m, de longueur 8 m et de hauteur $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$, soit à enlever : $5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} = 4 \text{ m}^3$. On a : $52 \text{ m}^3 - 4 \text{ m}^3 = 48 \text{ m}^3$.

La piscine contient alors 48 m^3 d'eau.

Méthode 2 : par calcul direct

On calcule le volume du prisme droit A'BCD'E'FGH' de bases trapézoïdales A'BCD' et E'FGH', en m^3 .

La hauteur du prisme E'A' est égale à EA donc E'A' = 5 m.

E'FGH' est un trapèze rectangle en E' et H', de hauteur 8 m, de petite base E'F = $1,10 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 1 \text{ m}$ et de grande base H'G = $1,50 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 1,4 \text{ m}$,

$$\text{donc Volume (A'BCD'E'FGH')} = \text{Aire (E'FGH')} \times \text{E'A}' = \frac{(1 \text{ m} + 1,4 \text{ m}) \times 8 \text{ m}}{2} \times 5 \text{ m} = 9,6 \text{ m}^2 \times 5 \text{ m} = 48 \text{ m}^3.$$

La piscine contient alors 48 m^3 d'eau.

1.b) Durée de remplissage de la piscine

La piscine contient 48 m^3 d'eau, soit $48\,000 \text{ dm}^3$, c'est-à-dire $48\,000 \text{ L}$ d'eau.

Sachant que le débit du tuyau d'arrosage est de 18 L/min , il faudra $\frac{48\,000}{18} \text{ min}$ pour remplir la piscine de $48\,000 \text{ L}$ d'eau, soit environ $2\,667 \text{ min}$ (arrondi à l'unité).

Méthode 1 :

Sachant que 1 h est égale à 60 min et que $\frac{2\,667}{60} = 44,45$,

$2\,667 \text{ min}$ correspondent à $44,45 \text{ h}$, soit à $24 \text{ h} + 20 \text{ h} + 0,45 \text{ h}$.

On convertit alors 24 h en 1 j et $0,45 \text{ h}$ en min : $0,45 \times 60 = 27$ donc $0,45 \text{ h} = 27 \text{ min}$.

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

Méthode 2 : conversion de la durée par recherche successive d'unités supérieures

1h, c'est 60 min et $\frac{2667}{60} = 44,45$ donc 2667 min , c'est 44 h complètes, qui correspondent à $2\,640 \text{ min}$ (car $44 \times 60 \text{ min} = 2640 \text{ min}$).

Puisque $2\,667 \text{ min} - 2\,640 \text{ min} = 27 \text{ min}$, on a : $2\,667 \text{ min} = 44 \text{ h} + 27 \text{ min}$.

(La division euclidienne de 2667 par 60 permet d'obtenir directement cette égalité : $2\,667 = 44 \times 60 + 27$).

Dans un jour il y a 24 h et $44 \text{ h} = 24 \text{ h} + 20 \text{ h}$, donc 44 h , c'est 1 j et 20 h .

On en déduit : $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j } 20 \text{ h } 27 \text{ min}$.

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

Méthode 3 : conversion de la durée par recherche de la plus grande unité

Un jour correspond à 24 h et une heure est égale à 60 min donc $1 \text{ j} = 24 \times 60 \text{ min} = 1\,440 \text{ min}$.

La division euclidienne de 2 667 par 1 440 permet d'écrire : $2\,667 = 1 \times 1\,440 + 1\,227$.

Donc $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j} + 1\,227 \text{ min}$.

La division euclidienne de 1 227 par 60 donne : $1\,227 = 20 \times 60 + 27$. Donc $1\,227 \text{ min} = 20 \text{ h} + 27 \text{ min}$.

D'où $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j} + 20 \text{ h} + 27 \text{ min}$

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

2. a) Quantité d'eau perdue en une semaine

Méthode 1 :

5 cm correspond à la moitié de la hauteur du pavé droit ADHEA'D'H'E' donc une baisse du niveau d'eau de 5 cm correspond à une perte de la moitié du volume de ADHEA'D'H'E' calculé en 1.a, soit à 2 m^3 .

En une semaine, 2 m^3 d'eau ont donc été perdus.

Méthode 2 :

Le volume d'eau perdu correspond au volume d'un pavé droit de largeur 5 m, de longueur 8 m, et de hauteur 5 cm = 0,05 m.

Le volume de ce pavé est : $5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 5 \text{ cm} = 5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 0,05 \text{ m} = 2 \text{ m}^3$.

Donc, en une semaine, il a perdu 2 m^3 d'eau.

Méthode 3 :

Le volume d'eau perdu correspond à la différence entre le volume d'eau initial et le volume d'eau actuel. Le nouveau volume d'eau est celui du prisme droit A'BCD'E'FGH' de hauteur E'A' = 5 m et de bases trapézoïdales A'BCD' et E'FGH'.

D'après la question 1.a. (*méthode 3*), E'FGH' est un trapèze rectangle en E' et H', de hauteur 8 m, et dont les longueurs des bases ont diminué de 5 cm = 0,05 m (ou de 15 cm = 0,15 m par rapport à EF et HG), donc E'F = 0,95 m et H'G = 1,35 m.

$$\text{Volume (A'BCD'E'FGH')} = \text{Aire (E'FGH')} \times \text{E'A}' = \frac{(0,95 \text{ m} + 1,35 \text{ m}) \times 8 \text{ m}}{2} \times 5 \text{ m} = 46 \text{ m}^3.$$

La piscine contient maintenant 46 m^3 d'eau au lieu de 48 m^3 , donc son volume a diminué de 2 m^3 .

En une semaine, 2 m^3 d'eau ont donc été perdus.

2. b) Pourcentage d'eau perdue

On a perdu 2 m^3 d'eau sur les 48 m^3 contenus initialement :

$$\frac{2 \text{ m}^3}{48 \text{ m}^3} = \frac{1}{24} \approx 0,042 \text{ arrondi au millième, soit environ } 4,2\% \text{ à } 0,1\% \text{ près.}$$

La quantité d'eau perdue en une semaine représente donc environ 4,2% de la quantité d'eau initiale.

3. Estimation du budget annuel en 2020

Méthode 1 : calcul direct du coût au bout de 5 années d'augmentation

Augmenter un nombre de 3% revient à le multiplier par 1,03 donc si le prix de l'eau augmente de 3% par an pendant 5 ans (de 2015 à 2020), le coût de l'eau sera multiplié par $1,03^5$.

$1,03^5 \times 207 \text{ €} \approx 239,97 \text{ €}$ à l'euro près par excès.

On peut donc estimer le budget annuel de l'eau de la piscine en 2020 à environ 240 €.

Méthode 2 : calcul successif des budgets annuels

En 2015, il a dépensé 207 € et le prix de l'eau augmente de 3% par an donc en 2016, il aura augmenté de

$$207 \text{ €} \times \frac{3}{100} = 6,21 \text{ €} \text{ et la dépense en 2016 sera donc de } 207 \text{ €} + 6,21 \text{ €} \text{ soit } 213,21 \text{ €}.$$

Pour 2017 : $213,21 \text{ €} + 213,21 \text{ €} \times \frac{3}{100} = 213,21 \text{ €} + 6,3963 \text{ €} = 219,6063 \text{ €}$.

Pour 2018 : $219,6063 \text{ €} + 219,6063 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 226,1945 \text{ €}$.

Pour 2019 : $226,1945 \text{ €} + 226,1945 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 232,9803 \text{ €}$.

Pour 2020 : $232,9803 \text{ €} + 232,9803 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 239,9697 \text{ €}$.

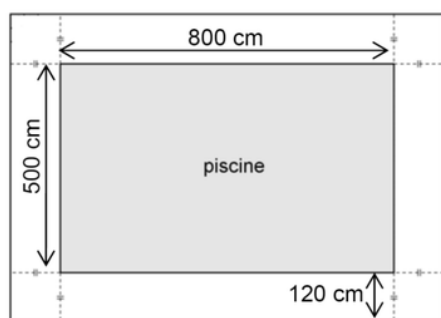
Donc, en 2020, le budget pour l'eau de la piscine sera d'environ 240 €.

Remarque :

Si elle demande un peu moins de connaissances sur les pourcentages, la deuxième méthode est plus fastidieuse et nettement moins efficace que la précédente. Elle est ici encore utilisable à la rigueur (cinq augmentations successives), mais nécessite souvent de conserver des résultats intermédiaires suffisamment précis pour ne pas aboutir à un résultat final trop approximatif. Ici, par précaution, on a gardé 4 décimales mais les arrondis successifs au 100^{ème} auraient abouti à 239,95 et des arrondis au 10^{ème} à 239,99, soit un arrondi final à l'unité de 240 dans tous les cas.

C. Dallage du sol autour de la piscine

1. Longueurs possibles pour le côté des dalles carrées



Comme suggéré sur le schéma ci-contre (fourni dans l'énoncé), on peut décomposer la surface à daller en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm.

Pour qu'aucune dalle ne soit coupée, la mesure en cm de la longueur du côté d'une dalle doit être un diviseur commun à 800, 500 et 120.

On cherche donc les diviseurs communs à 800, 500 et 120.

Méthode 1 : recherche et utilisation du PGCD des trois nombres

On cherche le plus grand diviseur commun à ces trois nombres.

$800 = 2^5 \times 5^2$; $500 = 2^2 \times 5^3$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ donc $\text{pgcd}(800, 500, 120) = 2^2 \times 5 = 20$.

Tous les diviseurs de 20 sont donc des mesures possibles pour le côté des dalles carrées.

Or les seules décompositions de 20 comme produit de deux entiers sont $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$,

donc les longueurs possibles du côté des dalles sont 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm et 20 cm.

Remarque :

Cette méthode s'appuie sur le fait que les diviseurs communs à plusieurs nombres sont exactement les diviseurs de leur pgcd et sur le recours à la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres pour en déduire leur pgcd.

Méthode 2 : utilisation de la liste exhaustive des diviseurs de l'un des trois nombres

On dresse la liste des diviseurs de l'un des trois nombres, par exemple 120, et, parmi ces diviseurs, on ne conserve ensuite que les nombres qui sont aussi des diviseurs des deux autres.

Pour déterminer les diviseurs de 120, on essaie de le diviser par chacun des entiers naturels strictement positifs inférieurs à sa racine carrée, et on ne conserve que les cas où le quotient est un nombre entier :

$\sqrt{120} \approx 10$ arrondi à l'unité inférieure.

$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15 = 10 \times 12$.

Les diviseurs de 120 sont donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

On cherche parmi ces nombres ceux qui sont des diviseurs de 500 : seuls conviennent 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Ces six nombres divisent aussi 800, donc ce sont les diviseurs communs aux trois nombres 120, 500 et 800.

Les longueurs possibles du côté des dalles sont donc 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm et 20 cm.

Remarque :

Dans la méthode présentée, on décompose la surface à paver en deux rectangles de 800 cm sur 120 cm, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et quatre carrés de 120 cm de côté.

On aurait pu décomposer cette surface différemment, par exemple :

1. en deux rectangles de 1040 cm sur 120 cm et deux autres de 500 cm sur 120 cm (schéma n°1) :
on cherche alors le pgcd de 1040, 500 et 120 ;
2. en deux rectangles de 740 cm sur 120 cm et deux autres de 800 cm sur 120 cm (schéma n°2) :
on cherche alors le pgcd de 740, 800 et 120 ;
3. en deux rectangles de 920 cm sur 120 cm et deux autres de 620 cm sur 120 cm (schéma n°3) :
on cherche alors le pgcd de 920, 620 et 120.

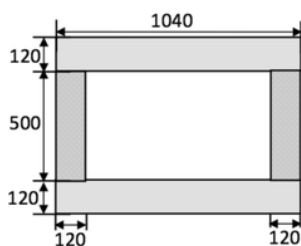


Schéma n°1

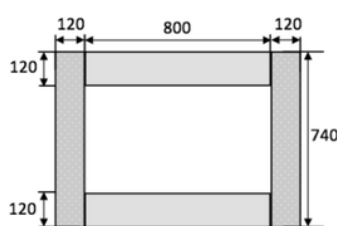


Schéma n°2

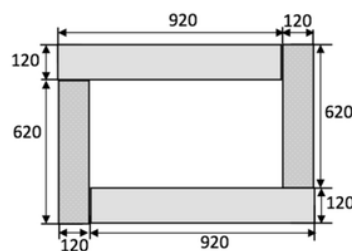


Schéma n°3

Remarque complémentaire :

Les nombres trouvés sont tous des diviseurs de l'aire de la surface à paver, mais ce ne sont pas nécessairement tous les diviseurs de cette aire. On ne peut donc pas répondre à cette question en se contentant de rechercher les diviseurs de l'aire de la surface à paver.

Par exemple, un rectangle de dimensions 50 cm par 40 cm ne peut pas être pavé par des dalles carrées entières de 20 cm de côté, alors que son aire (2 000 cm²) est divisible par l'aire d'une dalle (400 cm²).

2. a) Nombre de dalles carrées de 20 cm de côté utilisées

Méthode 1 : décomposition de la surface à recouvrir en plusieurs rectangles, et recherche du nombre de dalles utilisées sur chaque côté des rectangles à paver

On décompose la surface à carrelé en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm.

Le nombre de dalles de 20 cm de côté nécessaire pour carrelé un rectangle de $p \times 20$ cm sur $q \times 20$ cm, avec p et q entiers est $p \times q$. En effet, le rectangle sera couvert par p lignes de q dalles (figure 2).

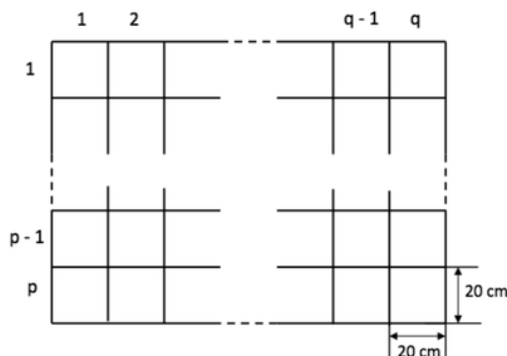


Figure 2

On applique le résultat ci-dessus pour chacun des rectangles de la décomposition.

- $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$ et $6 \times 6 = 36$ donc chaque carré de 120 cm de côté est recouvert par 36 dalles ;
- $500 \text{ cm} = 25 \times 20 \text{ cm}$, $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$, et $25 \times 6 = 150$ donc chaque rectangle de 500 cm sur 120 cm est recouvert par 150 dalles ;
- $800 \text{ cm} = 40 \times 20 \text{ cm}$, $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$, et $40 \times 6 = 240$ donc chaque rectangle de 800 cm sur 120 cm contient 240 dalles.

On calcule le nombre total de dalles utilisées : $4 \times 36 + 2 \times 150 + 2 \times 240 = 924$.

On utilisera donc 924 dalles de 20 cm de côté.

Remarque :

On peut utiliser cette méthode avec chacune des autres décompositions de la surface à carreler présentées dans la question précédente.

Méthode 2 : comparaison de l'aire de la surface à paver avec l'aire d'une dalle

- 1^{ère} étape : on calcule l'aire de la surface à paver.

Méthode 2a : calcul de l'aire par décomposition de la surface à carreler

Avec la décomposition de cette surface en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm , on obtient :

$$4 \times (120 \text{ cm})^2 + 2 \times 500 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} + 2 \times 800 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} = 369\,600 \text{ cm}^2$$

Donc l'aire de la surface à paver est $369\,600 \text{ cm}^2$.

Remarque :

On peut utiliser cette méthode avec chacune des autres décompositions de la surface à carreler présentées dans la question précédente.

Méthode 2b : calcul de l'aire par différence

L'aire de la surface à carreler est égale à l'aire d'un rectangle de 1040 cm sur 740 cm à laquelle on retire l'aire d'un rectangle de 800 cm sur 500 cm .

On calcule cette aire : $1040 \text{ cm} \times 740 \text{ cm} - 800 \text{ cm} \times 500 \text{ cm} = 369\,600 \text{ cm}^2$

Donc l'aire de la surface à paver est $369\,600 \text{ cm}^2$.

- 2^{ème} étape : on divise l'aire à carreler par l'aire d'une dalle carrée de 20 cm de côté, soit 400 cm^2 .
 $369\,600 : 400 = 924$.

On utilisera donc 924 dalles de 20 cm de côté.

2. b) Déduction du nombre de dalles carrées de 5 cm de côté nécessaires

Méthode 1 : utilisation du rapport des côtés des deux types de dalles

Méthode 1a : décompte direct du nombre de petites dalles dans chaque grande dalle

$20 = 5 \times 4$ donc sur chaque côté d'une dalle carrée de 20 cm de côté on doit mettre 4 dalles de 5 cm de côté, donc il faut $4 \times 4 = 16$ dalles de 5 cm de côté pour recouvrir une dalle carrée de 20 cm de côté, donc il faut 16 fois plus de dalles de 5 cm que de dalles de 20 cm .

On calcule : $16 \times 924 = 14\,784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Méthode 1b : utilisation du coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux types de dalles

Les deux types de dalles étant des carrés, les grandes sont des « agrandissements » des petites.

Le rapport entre les longueurs de leurs côtés est : $\frac{20}{5} = 4$, donc le rapport entre leurs aires est $4^2 = 16$.

En choisissant des dalles carrées de 5 cm de côté, il faudra donc 16 fois plus de dalles, soit $16 \times 924 = 14\,784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Méthode 2 : comparaison directe des aires des deux types de dalles

L'aire d'une dalle de 20 cm de côté est 400 cm^2 et l'aire d'une dalle de 5 cm de côté est 25 cm^2 .

Le rapport entre ces deux aires est : $\frac{400}{25} = 16$. Donc il faut 16 fois plus de petites dalles que de grandes.

On calcule : $16 \times 924 = 14784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Remarque :

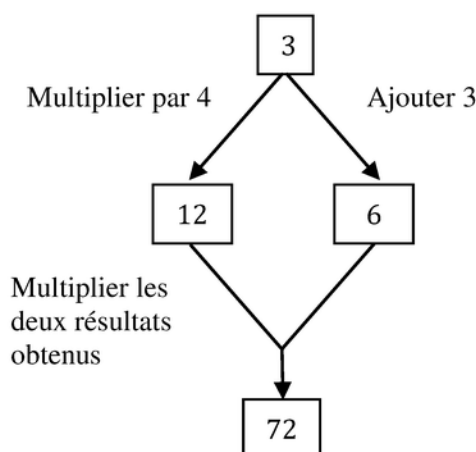
On aurait pu obtenir directement le nombre de dalles de 5 cm nécessaires en reprenant l'une ou l'autre des méthodes de la question 2.a) mais l'énoncé demandait de « déduire » ce résultat du précédent.

1. Calcul des nombres obtenus à l'issue de chacun des deux programmes pour deux valeurs particulières choisies comme nombres de départ

a) Quand on choisit 3 comme nombre de départ

Méthode 1 : calcul pas à pas

- Avec le premier programme, exécuté à l'aide d'un tableur, si on entre 3 dans la cellule A1, le logiciel effectue le calcul : $(2 \times 3 + 3) \times (2 \times 3 + 3) - 9$.
Il affiche le résultat en cellule B1 : $(6 + 3) \times (6 + 3) - 9 = 9 \times 9 - 9 = 81 - 9 = 72$.
- Le second programme se déroule de la manière suivante :



Ainsi, quand on choisit 3 comme nombre de départ, on obtient bien 72 avec chacun des deux programmes.

Méthode 2 : utilisation des expressions algébriques

Si on désigne par x le nombre choisi au départ et entré en cellule A1, le programme 1 calcule et affiche en cellule B1 le résultat de l'opération : $(2x + 3)(2x + 3) - 9$.

Ce nombre peut aussi s'écrire : $R_1 = (2x + 3)^2 - 9$.

Donc, si le nombre choisi est 3, on calcule R_1 pour $x = 3$: $R_1 = (2 \times 3 + 3)^2 - 9 = 9^2 - 9 = 81 - 9 = 72$.

De même, si x est le nombre choisi au départ, d'après le schéma proposé, le programme 2 calcule :

$$R_2 = 4x(x + 3) \text{ (pour détails, voir la réponse à la question 2.)}$$

Et si $x = 3$, on trouve $R_2 = 4 \times 3 \times (3 + 3) = 12 \times 6 = 72$.

Ainsi, quand on choisit 3 comme nombre de départ, on obtient bien 72 avec chaque programme.

b) Quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ

Méthode 1 : calcul pas à pas

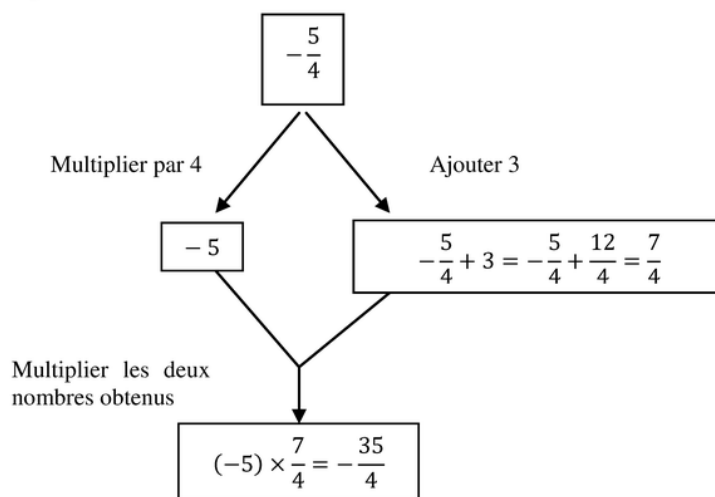
- le premier programme effectue l'opération suivante :

$$\left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right) \times \left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right) - 9.$$

On en calcule le résultat :

$$\left(-\frac{5}{2} + 3\right) \times \left(-\frac{5}{2} + 3\right) - 9 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{2}\right)^2 - 9 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = \frac{1}{4} - 9 = \frac{1}{4} - \frac{36}{4} = -\frac{35}{4}.$$

- Le second programme se déroule de la manière suivante :



Ainsi, quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ, on obtient $-\frac{35}{4}$ avec chacun des deux programmes.

Méthode 2 : utilisation des expressions algébriques

On calcule R_1 pour $x = -\frac{5}{4}$: $R_1 = \left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right)^2 - 9 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{2}\right)^2 - 9 = \frac{1}{4} - \frac{36}{4} = -\frac{35}{4}.$

De même, on calcule R_2 pour $x = -\frac{5}{4}$: $R_2 = 4 \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4} + 3\right) = -5 \times \left(-\frac{5}{4} + \frac{12}{4}\right) = -5 \times \frac{7}{4} = -\frac{35}{4}.$

Donc, quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ, on obtient $-\frac{35}{4}$ avec chaque programme.

2. Comparaison des nombres obtenus à l'issue de chacun des deux programmes.

Les deux exemples précédents laissent penser qu'il est possible que, quel que soit le nombre choisi au départ, on obtienne le même résultat avec les deux programmes. Prouvons-le.

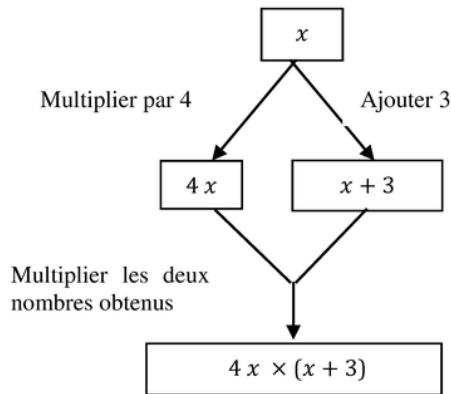
Remarque :

La démonstration d'un résultat qui doit être valable quel que soit le nombre considéré nécessite de désigner ce nombre « quelconque » par une lettre et de calculer avec cette lettre : c'est de « l'algèbre ». Si on a choisi cette méthode pour la question 1., il suffit ici d'utiliser les expressions R_1 et R_2 déterminées précédemment.

Pour cela, on désigne par x le nombre choisi au départ.

Quelle que soit la valeur de x ,

- le premier programme calcule : $(2x + 3)(2x + 3) - 9$;
- le second programme se déroule comme en page suivante :



Montrons que les deux expressions sont égales.

Quelle que soit la valeur de x ,

- $(2x + 3) \times (2x + 3) - 9 = (2x + 3)^2 - 9 = 4x^2 + 2 \times 3 \times 2x + 9 - 9 = 4x^2 + 12x$;
- $4x(x + 3) = 4x^2 + 3 \times 4x = 4x^2 + 12x$.

On obtient donc bien le même résultat avec les deux programmes quel que soit le nombre choisi au départ.

3. Recherche des nombres à choisir au départ pour obtenir 0 avec le programme 1

Remarque :

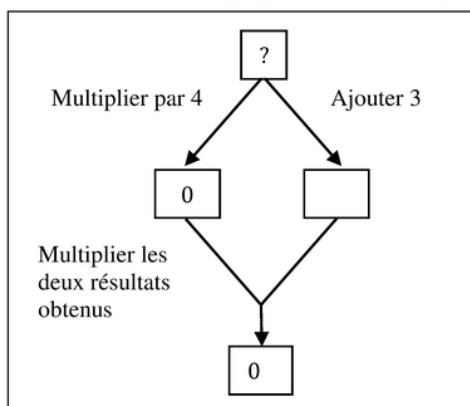
Il est facile de constater que si l'on choisit 0 comme nombre mis en entrée, on obtient également 0 en sortie : $(2 \times 0 + 3) \times (2 \times 0 + 3) - 9 = 3 \times 3 - 9 = 9 - 9 = 0$.

Mais 0 est-il le seul nombre solution ?

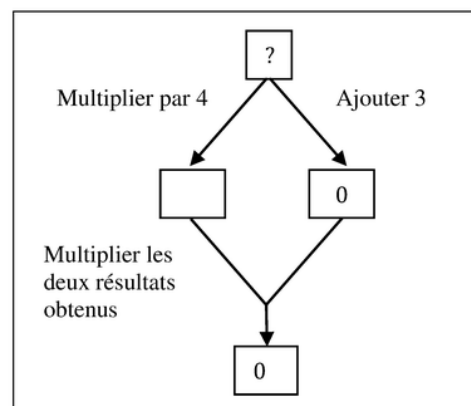
Méthode 1 : raisonnement arithmétique

Nous venons de prouver que les programmes 1 et 2 renvoient le même nombre quel que soit le nombre mis en entrée : le problème revient donc à chercher les nombres qui permettent d'obtenir 0 avec le programme 2.

Or la dernière étape de ce programme est une multiplication, dont le résultat est 0 : il faut donc que l'un des nombres de l'étape précédente soit égal à 0.



ou



En « remontant » dans chacune des branches des schémas ci-dessus, on trouve deux solutions : 0 (à gauche) et -3 (à droite).

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 2 : résolution algébrique à partir du résultat de la question 2.

On a vu dans la question précédente que si x désigne le nombre choisi, le résultat du programme 1 est $4x^2 + 12x$.

Il suffit donc de résoudre l'équation $4x^2 + 12x = 0$.

Or, quelle que soit la valeur de x , $4x^2 + 12x = 4x(x + 3)$.

Chercher x tel que $4x^2 + 12x = 0$ revient donc à chercher x tel que $4x(x + 3) = 0$.

Or on sait qu'un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Ici, on voit donc apparaître deux solutions :

- 0, qui est l'unique solution de $4x = 0$;
- -3 , qui est l'unique solution de $x + 3 = 0$.

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 3 : résolution d'une autre équation

Méthode 3a.

On a vu que si x désigne le nombre choisi, alors la valeur obtenue en sortie du programme 1 est égale à $(2x + 3) \times (2x + 3) - 9 = (2x + 3)^2 - 9$.

On peut factoriser cette expression en reconnaissant une identité remarquable : quelle que soit la valeur de x , $(2x + 3)^2 - 3^2 = ((2x + 3) - 3)((2x + 3) + 3) = 2x(2x + 6)$.

Il suffit donc de résoudre l'équation $2x(2x + 6) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$2x(2x + 6) = 0 \text{ si et seulement si } (2x = 0 \text{ ou } 2x + 6 = 0).$$

Or :

- l'équation $2x = 0$ a une unique solution : 0 ;
- $2x + 6 = 0$ si et seulement si $2x = -6$, autrement dit si et seulement si $x = -3$.

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 3b

Comme on l'a démontré en 2. les deux programmes renvoient le même nombre quel que soit le nombre mis en entrée, et si x désigne le nombre choisi, alors la valeur calculée par le programme 2 est égale à $4x(x + 3)$.

Pour trouver les nombres qui, mis en entrée du programme 1, conduisent à 0 en sortie, il suffit donc de résoudre l'équation $4x(x + 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$4x(x + 3) = 0 \text{ si et seulement si } 4x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \text{ ce qui équivaut à } x = 0 \text{ ou } x = -3.$$

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Affirmation 1 :

« Le produit de deux nombres décimaux strictement positifs a et b est plus grand qu'au moins un de ces deux nombres. »

Cette affirmation est **fausse**.

Il suffit de donner un contre-exemple : si on multiplie le nombre décimal strictement positif 0,1 par 0,2, le produit est égal à 0,02, qui est strictement inférieur à 0,1 et à 0,2.

Remarque :

Tout couple de deux nombres compris entre 0 et 1 fournit un contre-exemple.

Affirmation 2 :

« Pour tout nombre entier naturel n , le nombre $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ est un multiple de 4. ».

Cette affirmation est **vraie**.

En effet, quelle que soit la valeur de n ,

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 4n.$$

n étant un entier naturel, on reconnaît dans cette expression un multiple de 4.

Affirmation 3 :

« Pour tout nombre entier naturel n , $(n-1)(n+1) - 1$ est le carré d'un nombre entier. »

Cette affirmation est **fausse**. Il suffit de donner un contre-exemple :

si n est égal à 2, on a $(n-1)(n+1) - 1 = (2-1)(2+1) - 1 = 1 \times 3 - 1 = 2$.

Or il n'existe pas d'entier dont 2 soit le carré puisque 2 n'est le carré que de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, deux nombres qui ne sont pas entiers. Donc l'affirmation est bien fausse.

1. Calcul de la probabilité d'obtenir une boule bleue quand on tire au hasard une boule dans l'urne initiale

Les boules contenues dans l'urne étant indiscernables au toucher, la probabilité d'obtenir une boule bleue est égale à la proportion de boules bleues dans l'urne (*autrement dit au rapport entre le nombre de boules bleues et le nombre total de boules dans l'urne*).

On peut lire sur le diagramme fourni le nombre de boules de chacune des couleurs.

Couleur	rouge	vert	jaune	bleu	marron
Nombre de boules	3	4	5	7	6

Le nombre total de boules peut alors être calculé : $3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 25$.

Il y a donc 7 boules bleues parmi 25 boules dans l'urne.

On en déduit la probabilité d'obtenir une boule bleue : $\frac{7}{25}$, ou encore 0,28.

La probabilité que la boule tirée soit bleue est 0,28.

2. Calcul du nombre minimal de boules à ajouter dans l'urne initiale pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4

Méthode 1 : raisonnement arithmétique par recherche exhaustive

Dans la question précédente, on a vu que lorsque l'urne contient 7 boules bleues, la probabilité de tirer une boule bleue est égale à 0,28 (valeur inférieure à la probabilité que l'on cherche à atteindre).

Une méthode consiste donc à ajouter des boules bleues une à une et à calculer la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne alors constituée jusqu'à atteindre une probabilité supérieure ou égale à 0,4.

On peut être certain à l'avance que la probabilité d'obtenir une boule bleue augmentera au fil des tentatives : en effet, puisque l'on ajoute seulement des boules bleues, les boules des autres couleurs étant conservées, la proportion de boules bleues va croître au fur et à mesure des ajouts.

On ajoute des boules bleues une à une jusqu'à ce que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.

On peut consigner les essais successifs dans un tableau :

Nombre de boules bleues ajoutées	1	2	3	4	5
Nombre total de boules bleues	8	9	10	11	12
Nombre total de boules	26	27	28	29	30
Probabilité de tirer une boule bleue (*)	$\frac{8}{26} \approx 0,3$	$\frac{9}{27} \approx 0,33$	$\frac{10}{28} \approx 0,35$	$\frac{11}{29} \approx 0,37$	$\frac{12}{30} = 0,4$

(*) le cas échéant, les valeurs approchées sont données au centième près par défaut.

Donc, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4, on doit ajouter au minimum 5 boules bleues dans l'urne.

Méthode 2 : utilisation de l'algèbre

Soit b un nombre entier strictement positif.

Quand on ajoute b boules bleues dans l'urne initiale :

- le nombre de boules bleues est égal à $7 + b$;
- le nombre total de boules est égal à $25 + b$.

La probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7+b}{25+b}$.

Nous cherchons la valeur minimale à donner à b pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à 0,4, ce qui revient à résoudre dans l'ensemble des nombres entiers non nuls l'inéquation : $\frac{7+b}{25+b} \geq 0,4$.

Puisque b est strictement positif, $25 + b$ est aussi strictement positif et donc, dans l'ensemble des nombres entiers non nuls, les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{7+b}{25+b} &\geq 0,4. \\ 7+b &\geq 0,4(25+b). \\ 7+b &\geq 10+0,4b. \\ b-0,4b &\geq 10-7. \\ 0,6b &\geq 3. \\ b &\geq \frac{3}{0,6}. \\ b &\geq 5. \end{aligned}$$

La plus petite valeur de b qui convient est donc 5.

Donc, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4, on doit ajouter au minimum 5 boules bleues dans l'urne.

3. Calcul du nombre minimal de boules rouges à ajouter dans l'urne initiale pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2

D'après la question 1, la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne initiale est $\frac{7}{25} = 0,28$.

*Méthode 1 : raisonnement arithmétique par essais-ajustements**Remarque :*

Comme dans la question précédente, on peut commencer par remarquer que plus il y a de boules rouges dans l'urne (les boules des autres couleurs étant conservées), plus la proportion de boules bleues dans l'urne est faible : autrement dit, la probabilité de tirer une boule bleue va décroître au fur et à mesure des ajouts de boules rouges. On peut alors adopter une méthode exhaustive analogue à la méthode 1 présentée pour la résolution de la question précédente : on ajoute une à une des boules rouges en contrôlant à chaque étape la probabilité de tirer une boule bleue alors atteinte, jusqu'à atteindre comme probabilité 0,2 ou une valeur inférieure. Nous en présentons ici une alternative, par essais et ajustements.

- Si on ajoute 5 boules rouges, il y a alors 7 boules bleues parmi 30 boules ($25 + 5$) dans l'urne ; la probabilité de tirer une boule bleue est alors $\frac{7}{30}$, soit 0,23 au centième près par défaut : cette probabilité est supérieure à 0,2, donc trop grande. Le nombre de boules rouges ajoutées est trop petit.
- Si on ajoute 8 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue devient $\frac{7}{33}$, soit 0,21 au centième près par défaut : cette probabilité est encore trop grande.
- Si on ajoute 12 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7}{37}$, soit 0,18 au centième près par défaut. Cette fois-ci, la probabilité obtenue est inférieure à 0,2.
- Si on ajoute 10 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{7}{35}$, qui est égal exactement à 0,2.

Avec 9 boules rouges, on obtiendrait une probabilité strictement supérieure à celle que l'on vient d'obtenir pour 10 boules rouges, donc strictement supérieure à 0,2, donc trop grande. On peut donc en déduire que le nombre minimal de boules rouges à ajouter pour atteindre la probabilité souhaitée est 10.

Pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2, il faut donc ajouter au minimum 10 boules rouges dans l'urne.

Remarque :

Ici, nous avons détaillé le raisonnement pour chacun des essais mais une présentation sous forme de tableau similaire à celui utilisé pour la méthode 1 de la question 2. conviendrait aussi.

Méthode 2 : raisonnement algébrique

Soit r un nombre entier strictement positif.

Quand on ajoute r boules rouges dans l'urne initiale :

- le nombre de boules bleues présentes reste égal à 7 ;
- le nombre total de boules présentes dans l'urne est égal à $25 + r$.

La probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7}{25 + r}$.

Nous cherchons ici la valeur minimale à donner à r pour que cette probabilité soit inférieure ou égale à 0,2. Ceci revient à résoudre l'inéquation : $\frac{7}{25 + r} \leq 0,2$.

Dire que r , nombre strictement positif, est solution de l'inéquation $\frac{7}{25 + r} \leq 0,2$.

revient à dire que r est solution de l'inéquation $7 \leq 0,2 (25 + r)$ puisque $25 + r$ est strictement positif.

Cette inégalité s'écrit aussi : $7 \leq 5 + 0,2 r$, ou encore $7 - 5 \leq 0,2 r$, soit $0,2 r \geq 2$, c'est-à-dire $r \geq \frac{2}{0,2}$ et donc $r \geq 10$.

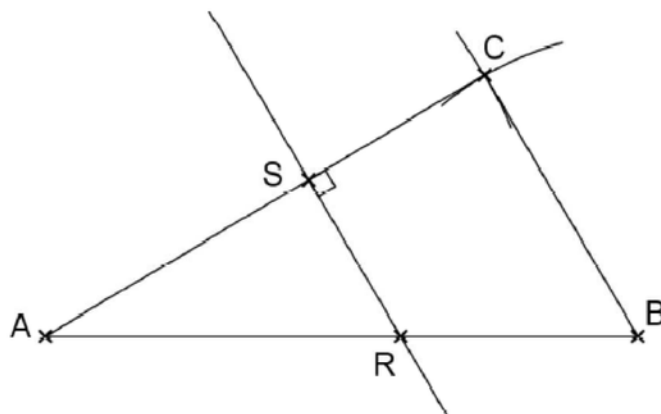
On en conclut que, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2, il faut ajouter au minimum 10 boules rouges dans l'urne.

Remarque :

En constatant que $0,2 = \frac{1}{5} = \frac{7}{35}$, on est amené à résoudre l'inéquation $\frac{7}{25+r} \leq \frac{7}{35}$ dont les solutions sont les nombres r vérifiant $25 + r \geq 35$ c'est-à-dire $r \geq 10$.

1. Construction de la figure à l'échelle $\frac{1}{10}$

Construire la figure à l'échelle $\frac{1}{10}$ consiste à construire une figure où les longueurs sont 10 fois plus petites que les longueurs réelles. Ainsi, le segment $[AB]$ est représenté par un segment de longueur 6,5 cm ; le segment $[AC]$ par un segment de longueur 5,6 cm ; le segment $[BC]$ par un segment de longueur 3,3 cm, et le segment $[AR]$ par un segment de longueur 3,9 cm.



Remarque :

Comme les traits de construction en témoignent, le point C est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre A et de rayon 6,5 cm et du cercle de centre B et de rayon 3,3 cm.

2. Démonstration du parallélisme des droites (BC) et (RS)

D'après l'énoncé, les droites (RS) et (AC) sont perpendiculaires.

Montrons que les droites (BC) et (AC) le sont aussi.

Dans le triangle ABC :

- d'une part $AB^2 = 65^2 = 4225$;
- d'autre part $AC^2 + BC^2 = 56^2 + 33^2 = 4225$.

Ainsi $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut conclure que le triangle ABC est rectangle en C. Par conséquent les droites (AC) et (BC) sont bien perpendiculaires.

Les droites (RS) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (AC) donc **les droites (RS) et (BC) sont parallèles.**

Remarque :

Constater sur la figure, visuellement ou avec des instruments, que le triangle ABC est rectangle en C ne permet pas d'affirmer qu'il l'est effectivement.

3. Calcul de la longueur AS

On sait que :

- les points A, R et B d'une part, et A, S et C d'autre part sont alignés (d'après l'énoncé) ;
- les droites (RS) et (BC) sont parallèles (on vient de le prouver).

Les triangles ASR et ABC sont donc dans une configuration où on peut utiliser le théorème de Thalès (le triangle ASR est une réduction du triangle ABC) :

$$\frac{AS}{AC} = \frac{AR}{AB} ; \text{ or } \frac{AR}{AB} = \frac{39 \text{ cm}}{65 \text{ cm}} = \frac{39}{65} = \frac{3 \times 13}{5 \times 13} = \frac{3}{5} = 0,6 ;$$

par conséquent $AS = 0,6 \times AC = 0,6 \times 56 \text{ cm} = 33,6 \text{ cm}$.

Donc la longueur AS est 33,6 cm.

Remarque :

On peut vérifier sur la figure que la longueur obtenue est plausible (sur la figure à l'échelle $\frac{1}{10}$ la longueur du segment qui représente [AS] est bien comprise entre 3,3 cm et 3,4 cm).

4. Calcul de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ARS}$

Remarque :

Dans le triangle ARS rectangle en S, nous connaissons désormais les longueurs de deux côtés. Nous savons qu'il est alors possible de déterminer les mesures en degrés de chacun des angles du triangle, en utilisant une formule adéquate de trigonométrie puis la calculatrice.

Ici, nous connaissons les longueurs AS et AR, et nous nous intéressons à l'angle $\widehat{ARS}$: le sinus de cet angle permet de relier ces trois grandeurs.

On sait que $\sin \widehat{ARS} = \frac{AS}{AR}$ donc $\sin \widehat{ARS} = \frac{33,6 \text{ cm}}{39 \text{ cm}} = \frac{33,6}{39} \approx 0,862$ à 0,001 près.

L'angle $\widehat{ARS}$ mesure donc environ 59° , à une unité près.

Remarque 1 :

On peut vérifier sur la figure que l'angle obtenu est plausible (dans une réduction, les angles sont conservés, et sur la figure construite ci-dessus, on peut mesurer l'angle $\widehat{ARS}$ avec un rapporteur : on obtient bien une valeur proche de 59°).

Remarque 2 :

Les droites (RS) et (BC) étant parallèles, les angles $\widehat{ARS}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, donc égaux. On peut donc aussi déterminer l'angle à partir des longueurs des côtés du triangle ABC (données par l'énoncé) et à l'aide de l'une quelconque des trois fonctions trigonométriques usuelles (sinus, cosinus ou tangente). Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'on n'a pas su calculer la longueur AS ou qu'on n'est pas sûr de son résultat.