

PARTIE A - Étude de la situation concrète

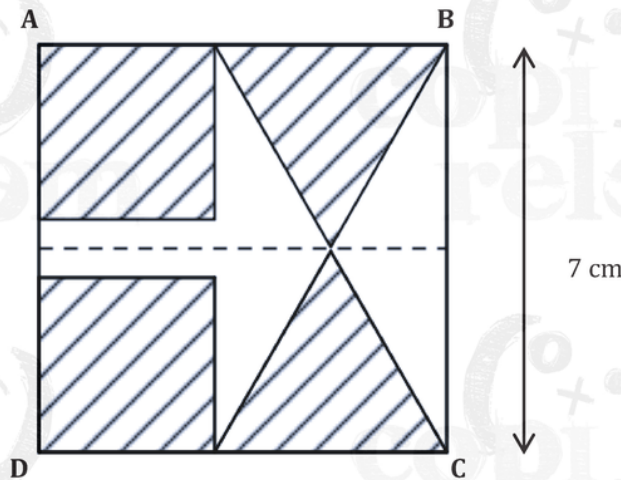


Figure 2

1) a) Vérification des contraintes

Remarque :

L'énoncé recèle une ambiguïté, qu'entend-t-on par « disposition de la figure 2 » ?

On peut considérer que l'on respecterait encore cette disposition en réduisant la taille des yeux ; c'est le choix que nous avons fait à cette question et c'est pourquoi nous considérons qu'il y a trois contraintes à vérifier.

On peut aussi considérer que la « disposition de la figure 2 » intègre dans son principe le fait que le long des côtés [AB] et [DC], les yeux carrés et triangulaires ont chacun un sommet commun avec le carré ABCD et qu'ils se « touchent nécessairement », c'est-à-dire qu'ils ont aussi un sommet commun entre eux. Dans ce cas, la somme des longueurs d'un côté d'un œil carré et d'un côté d'un œil triangulaire doit être exactement égale à 7 cm. C'est le choix qui semble plus loin privilégié par l'énoncé dans la question 2a).

Il y a trois contraintes dont il faut vérifier qu'elles sont satisfaites.

Nous nommons ABCD le carré de 7 cm de côté (Figure 2).

- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.
- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égal à 7 cm.
- Le long du côté [BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.

On vérifie aisément que les deux premières contraintes sont satisfaites :

- La somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire est égale à 4 cm + 3 cm, soit exactement égale à 7 cm. Les deux yeux, le carré et le triangulaire, ont un sommet commun.
- Le double de la longueur du côté d'un œil carré est égal au double de 3 cm, soit 6 cm. Les deux yeux carrés sont donc ici séparés par une bande de largeur 1 cm.

Pour vérifier que la 3^{ème} contrainte est satisfaite, il faut déterminer la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire de côté 4 cm.

La formule rappelée dans l'énoncé donne $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm dont la valeur approchée par excès au dixième de millimètre près est $h \approx 3,47$ cm.

Le double de h est donc inférieur à 6,94 cm et donc inférieur à 7 cm.

Il est donc possible de placer deux yeux triangulaires le long du bord droit du carré.

Ses deux yeux sont séparés par moins d'un millimètre.

Il est donc possible d'avoir les deux carrés de côté 3 cm et les deux triangles équilatéraux de côté 4 cm dans la disposition de la figure 2.

1) b) Comparaison de l'aire d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm.

L'aire d'un œil carré est de 9 cm^2 : $A_c = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$.

L'aire d'un œil triangulaire est inférieure à $6,95 \text{ cm}^2$:

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 6,94 \text{ cm}^2.$$

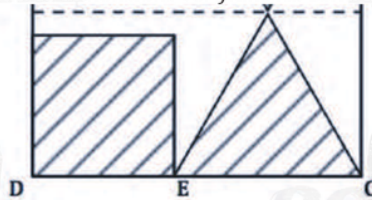
L'aire d'un œil carré est ici strictement supérieure à celle d'un œil triangulaire.

Les aires du carré et du triangle ne sont donc pas égales.

2) Choix des dimensions pour les yeux en fonction des contraintes

Remarque 1 :

Il est possible de répondre au problème posé autrement que par une mise en système. Dans la « disposition de la figure 2 » le carré et le triangle équilatéral représentant les yeux ont même périmètre. Soit E le sommet commun au carré et au triangle sur le côté [DC]. Si la longueur DE diminue, la longueur EC augmente et dans ce cas le périmètre du carré ($4 \times DE$) diminue tandis que celui du triangle ($3 \times EC$) augmente : les périmètres ne sont donc plus égaux. Inversement, si EC diminue, DE augmente et les périmètres ne sont plus égaux. Il n'est donc pas possible de trouver d'autres dimensions vérifiant les contraintes données.



Remarque 2 :

x et y sont des longueurs de côté, leurs mesures en cm sont donc des réels positifs.

2) a) Mise en équation

Si x et y sont solutions du problème, un œil carré de côté x et un œil triangulaire de côté y doivent déjà avoir même périmètre.

Comme leurs périmètres respectifs sont $4x$ (un carré a 4 côtés) et $3y$ (un triangle a 3 côtés), on doit avoir l'égalité $4x = 3y$, qui est équivalente à $4x - 3y = 0$, première égalité du système.

Par ailleurs, pour respecter la disposition de la figure 2 et en reprenant le raisonnement développé au 1)a), x et y doivent respecter les trois contraintes suivantes :

- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être égale à 7 cm pour que les deux yeux se touchent et qu'ils aient chacun un sommet commun avec le carré ABCD.

D'où $x + y = 7$.

- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égale à 7 cm.

D'où $2x \leq 7$.

- Le long du côté [BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.

Comme la hauteur d'un œil triangulaire est égale à $h = \frac{y\sqrt{3}}{2}$, on doit avoir $2 \times \frac{y\sqrt{3}}{2} \leq 7$, c'est-à-dire $y\sqrt{3} \leq 7$.

Ainsi, si x et y sont solutions du problème, ils doivent bien être solution du système :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

2) b) Représentation graphique du problème

Soit (x ; y) un couple de nombres solution du système précédent.

Ce couple doit déjà être solution du système formé par les deux premières équations, c'est-à-dire du

$$\text{système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

En cherchant dans chacune de ces deux équations à exprimer y en fonction de x , on fait apparaître les fonctions f et g .

En effet, la première équation est équivalente à $3y = 4x$ et donc à $y = \frac{4}{3}x$.

C'est-à-dire à $y = f(x)$.

Ainsi les couples $(x ; y)$ de nombres qui vérifient la première équation sont les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f (courbe qui est une droite puisque f est une fonction linéaire et qui est croissante car son coefficient directeur est positif).

De même, la seconde équation est équivalente à $y = 7 - x$, c'est-à-dire à $y = g(x)$.

Ainsi les couples $(x ; y)$ de nombres qui vérifient la deuxième équation sont les coordonnées des points de la courbe (Δ) représentative de la fonction g (courbe qui est une droite puisque g est une fonction affine et qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif, c'est -1).

Au final, pour être solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$, formé des deux premières équations, le couple $(x ; y)$ doit correspondre aux coordonnées d'un point appartenant à la fois à la droite $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f et à la droite (Δ) représentative de la fonction g .

Or celles-ci n'ont qu'un seul point d'intersection. Et l'on obtient par lecture graphique $x = 3$ et $y = 4$.

Le problème admet donc au plus une solution, mais il reste à vérifier que ces valeurs satisfont aussi les deux dernières inéquations du système :

- quand x vaut 3, l'inéquation $2x \leq 7$ est évidemment vérifiée ($2 \times 3 = 6$).
- quand y vaut 4, l'inéquation $y\sqrt{3} \leq 7$ est aussi vérifiée car $4\sqrt{3} \approx 6,93$.

Ainsi, à l'aide de la représentation graphique, on peut affirmer qu'un seul couple de nombres vérifie les deux premières équations du système. Par lecture graphique, on peut supposer que les solutions pour x et y sont respectivement 3 et 4 et que ce sont bien des réponses au problème posé car ces valeurs vérifient aussi les deux dernières inéquations.

Toutefois, il convient d'être prudent car les valeurs 3 et 4 lues graphiquement pourraient n'être que des valeurs approchées des valeurs de x et de y solutions du système formé par les deux seules premières équations.

Dans ce cas, nous n'aurions plus l'assurance que les valeurs exactes de x et de y satisfont aussi les deux dernières inéquations (c'est en particulier vrai pour la toute dernière, la valeur 6,94 étant très proche de 7).

2) c) Résolution par le calcul du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Il s'agit d'un système de deux inconnues à deux équations. On peut le résoudre de plusieurs façons. Parmi les méthodes classiques :

Une méthode par substitution :

$$\begin{aligned} \text{Le système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} & \text{ est équivalent à } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 4x - 3(7 - x) = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 4x - 21 + 3x = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 7x - 21 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} x = 21/7 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Une méthode par combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Le système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} & \text{ est équivalent à } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 3y = 21 \end{cases} \\ & \text{d'où par addition } 7x = 21 \text{ d'où } x = 3. \end{aligned}$$

En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$.

Une méthode par comparaison :

On peut aussi réutiliser le travail réalisé à la question précédente :

Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = 7 - x \end{cases}$

on a alors l'équation en x : $\frac{4}{3}x = 7 - x$ d'où $4x = 21 - 3x$ d'où $7x = 21$ d'où $x = 3$.

En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$

On obtient finalement $x = 3$ et $y = 4$.

Notons que l'on retrouve les valeurs données au 1)a).

Pour que ce couple soit solution du problème, il reste à vérifier que ces valeurs de x et de y vérifient aussi les deux inéquations du système.

Comme $x = 3$, on a bien $2x \leq 7$.

Comme $y = 4$, on a bien $y\sqrt{3} \leq 7$, car la valeur approchée au centième près de $4\sqrt{3}$ est 6,93.

Ainsi le problème possède une unique solution. Ce sont les valeurs de x et de y rencontrées lors du 1)a).

3) Nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 à prévoir

Commençons par quelques remarques préliminaires :

- La longueur d'une feuille de format A3 est de 42 cm, c'est-à-dire exactement le triple de 14 cm.
- La largeur d'une feuille de format A3 est de 29,7 cm, c'est-à-dire un peu plus du double de 14 cm.

Il est donc aisé de fabriquer 6 carrés de 14 cm de côté dans une feuille de format A3, ceci avec peu de chute de carton.

- Par ailleurs, 7 cm représente exactement la moitié de 14 cm et 3,5 cm, qui est la moitié de 7 cm, représente un quart de 14 cm.

Ainsi sur la surface occupée par un carré de 14 cm de côté, on peut à la place choisir de fabriquer 8 rectangles de 7 cm sur 3,5 cm.

Il n'est alors pas trop difficile de trouver des solutions utilisant 5 feuilles cartonnées.

Par exemple :

- 6 carrés de 14 cm de côté dans les 4 premières feuilles découpées ainsi

Carré de 14 cm de côté	Carré de 14 cm de côté	
Bordure non utilisée : 1,7 cm de large		

- puis dans la 5^{ème} feuille, découpée comme ci-dessous
 - le 25^{ème} carré de 14 cm de côté ;
 - 3 fois 8, soit 24 rectangles de 7cm sur 3,5 cm à la place qu'auraient pu occuper trois autres carrés de 14 cm ;
 - et pour finir le 25^{ème} rectangle.

Carré de 14 cm de côté									
Bordure non utilisée 1,7 cm de large									

Pour montrer que 5 feuilles sont nécessaires, montrons que 4 feuilles ne suffiraient pas. Pour cela, raisonnons sur les aires.

Quatre feuilles cartonnées au format A3, 420 mm x 297 mm ont une aire totale, exprimée en cm^2 , de : $4 \times 42 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm} = 4989,6 \text{ cm}^2$.

Par ailleurs, l'aire totale dont a besoin le professeur est la somme de celles de 25 carrés de 14 cm de côté et de 25 rectangles de 7 cm de longueur sur 3,5 cm de largeur.

Il a donc besoin *a minima* d'une aire, exprimée en cm^2 , de :

$$25 \times (14 \text{ cm})^2 + 25 \times 7 \text{ cm} \times 3,5 \text{ cm} = 4900 \text{ cm}^2 + 612,5 \text{ cm}^2 = 5512,5 \text{ cm}^2.$$

Ainsi quatre feuilles ne lui suffiront pas et **le nombre minimum de feuilles de format A3 qu'il doit prévoir est cinq.**

PARTIE B - Démonstration de résultats mathématiques

1) Démonstration du résultat

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Notons A, B et C les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté a et I le milieu de [BC].

Considérons le triangle ABI.

Ce triangle est rectangle en I car la médiane (AI) est aussi la médiatrice de [BC] et donc la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC. Ce résultat peut se démontrer de la façon suivante :

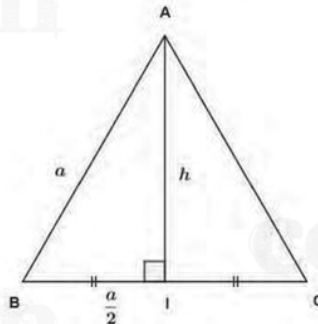
A est équidistant de B et de C : on a $AB = AC$ car ABC est un triangle équilatéral.

I est équidistant de B et de C, car I est le milieu de [BC].

Donc (AI) est la médiatrice de [BC]. Les droites (AI) et (BC) sont donc perpendiculaires.

En conséquence, I est le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de A.

Donc la médiane [AI] est aussi la hauteur issue de A du triangle ABC.



Nous pouvons alors appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I :

$$BI^2 + IA^2 = BA^2$$

L'hypoténuse [AB] a pour mesure a , c'est un côté du triangle équilatéral ABC.

Le côté [BI] a pour mesure $\frac{a}{2}$, car I est le milieu de [BC], côté du triangle équilatéral ABC.

Le côté [AI] a pour mesure h , c'est la hauteur du triangle équilatéral ABC.

Ainsi :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } \frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{D'où le résultat cherché } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) a) Comparaison des périmètres d'un carré de côté x et d'un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

Le carré, qui a quatre côtés égaux, a pour périmètre $P_1 = 4x$.

Le triangle, qui a trois côtés égaux, a pour périmètre $P_2 = 3y = 3 \times \frac{4}{3}x = 4x$.

Le carré et le triangle équilatéral ont bien même périmètre.

2) b) Expression de l'aire A_1 du carré et de l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x , puis du rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

Le carré a pour aire $A_1 = x^2$.

Le triangle équilatéral a pour aire :

$$A_2 = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times y \times \frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{9}x^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2$$

Le rapport de ces deux aires est égal à $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{9}x^2}{x^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Notons que ce rapport ne dépend pas de x .

2) c) Comparaison des aires A_1 et A_2

Dans la question A.1.b), les valeurs numériques de x et de y étaient respectivement de 3 cm et de 4 cm, nombres qui vérifient bien la relation $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi les résultats des questions a) et b) ci-dessus s'appliquent à ces valeurs :

- On retrouve ainsi le fait que les périmètres sont égaux.
- On en déduit aussi que le rapport entre les deux aires, qui ne dépend pas de x , vaut $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. Ce rapport, dont une valeur approchée est 0,77, est différent de 1. Donc les deux aires sont différentes. On peut même être plus précis : puisque $\frac{A_2}{A_1} \approx 0,77$, l'aire A_2 du triangle équilatéral représente dans ces cas environ 77% de l'aire A_1 du carré.

1) Vitesse moyenne du vététiste par la route goudronnée

On utilise ici la relation $vitesse\ moyenne = \frac{Distance\ parcourue}{Temps\ de\ parcours}$ liant la vitesse moyenne à la distance parcourue et au temps de parcours.

L'énoncé n'impose pas d'unité pour la vitesse moyenne, nous choisissons de l'exprimer en km/h.

La distance parcourue est ici $D = 27$ km.

Le temps de parcours est de 1 heure et 30 minutes qu'il nous faut exprimer en heure.

On peut au choix exprimer cette durée :

- en heure décimale, 1 h 30 min = 1,5 h et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul :

$$V = \frac{27\text{ km}}{1,5\text{ h}} = \mathbf{18\text{ km/h}}$$

- à l'aide d'une fraction, 1 h 30 min = $1\text{ h} + \frac{1}{2}\text{ h} = \frac{3}{2}\text{ h}$ et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul

$$V = \frac{27\text{ km}}{\frac{3}{2}\text{ h}} = 27 \times \frac{2}{3}\text{ km/h} = \mathbf{18\text{ km/h}}$$

Autre méthode :

Le vététiste parcourt 27 km en 1 h 30, soit en 3 fois une demi-heure.

À vitesse constante, il parcourt donc 9 km en 30 min, soit 18 km en 1 h.

Il a donc roulé à une vitesse moyenne de **18 km/h**.

2) Vitesse moyenne du vététiste par la piste en terre.

Commençons, comme précédemment, par calculer cette nouvelle vitesse moyenne en km/h.

La distance parcourue est ici $D = 28$ km.

Le temps de parcours est de 1 heure et 45 minutes qu'il nous faut exprimer en heure.

On peut encore, au choix, exprimer cette durée :

- en heure décimale, 1 h 45 min = 1,75 h et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul

$$v = \frac{28\text{ km}}{1,75\text{ h}} = \mathbf{16\text{ km/h}}$$

- à l'aide d'une fraction, 1 h 45 min = $1\text{ h} + \frac{3}{4}\text{ h} = \frac{7}{4}\text{ h}$ et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul :

$$v = \frac{28\text{ km}}{\frac{7}{4}\text{ h}} = 28 \times \frac{4}{7}\text{ km/h} = \mathbf{16\text{ km/h}}$$

Autre méthode :

Le vététiste parcourt 28 km en 1 h 45, soit en 7 fois un quart d'heure.

À vitesse constante, il parcourt donc 4 km en 15 min, soit 16 km en 1 h.

Il a donc roulé à une vitesse moyenne de **16 km/h**.

Pourcentage de diminution de sa vitesse moyenne

Le rapport entre la nouvelle et la précédente vitesse est de $\frac{16\text{ km/h}}{18\text{ km/h}} = 0,88\overline{8} \dots \approx 0,89$.

Ce rapport traduit une **baisse d'environ 11% de la vitesse moyenne entre la première et la seconde semaine** ($0,89 = 1 - 0,11$).

Remarque :

Dans cet énoncé les données relatives aux altitudes de départ et du col ne sont d'aucune utilité.

1) Longueur mesurée par le ressort si on suspend une masse de 70 g

Si on suspend une masse de 70 g, on aura ajouté 7 fois 10 g. Le ressort s'allongera de 7 fois 0,5 cm, c'est-à-dire de 3,5 cm et il aura alors pour longueur $14 \text{ cm} + 3,5 \text{ cm} = 17,5 \text{ cm}$.

2) Masse suspendue au ressort s'il mesure 28 cm

Si le ressort mesure 28 cm, c'est qu'il s'est allongé de 14 cm en plus des 14 cm de sa longueur au repos. Ces 14 cm supplémentaires correspondent à 28 fois 0,5 cm. **La masse suspendue au ressort est donc de 28 fois 10 g, c'est-à-dire 280 g.**

3) La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ?

La réponse, qui est négative, peut être justifiée par des arguments de différentes natures.

On peut se situer :

Méthode 1 : dans le registre numérique en donnant un contre-exemple issu des résultats obtenus aux questions précédentes

La propriété prioritairement mobilisée ici est celle de linéarité multiplicative.

Par exemple :

- ✓ La longueur du ressort est de 28 cm quand la masse suspendue est de 280 g. S'il y avait proportionnalité, lorsque la longueur du ressort est moitié moins, c'est-à-dire 14 cm, la masse suspendue devrait être moitié de 280 g, c'est-à-dire 140 g. Or 14 cm est la longueur du ressort à vide.
- ✓ Ou encore : 280 g est le quadruple de 70 g. S'il y avait proportionnalité, la longueur du ressort lorsque l'on suspend ces 280 g devrait être le quadruple de sa longueur lorsque l'on suspend 70 g, c'est-à-dire le quadruple de 17,5 cm. Cette longueur devrait donc être de $4 \times 17,5 \text{ cm} = 70 \text{ cm}$, or elle n'est que de 28 cm.
- ✓ Ou encore, sans calcul : si la longueur du ressort était proportionnelle à la masse suspendue, elle serait nulle pour une masse nulle, or 14 cm est la longueur du ressort à vide.

Méthode 2 : dans le registre fonctionnel en explicitant la relation exprimant la longueur l du ressort (exprimée en cm) en fonction de la masse m suspendue (exprimée en g)

Le résultat que l'on va mobiliser ici est le suivant : « lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, la fonction permettant d'exprimer l'une de ces grandeurs en fonction de l'autre est linéaire, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$ ».

La situation décrite par l'énoncé se traduit par la relation $l = 14 + \frac{0,5}{10}m$ ou encore par $l = 0,05m + 14$. La fonction f exprimant l en fonction de m est donc la fonction définie par : $l = f(m) = 0,05m + 14$.

Cette fonction est affine (elle est de la forme $f(x) = ax + b$) mais elle n'est pas linéaire en raison de la présence de la constante b qui n'est pas nulle ; b vaut ici 14.

Méthode 3 : dans le registre graphique, en représentant dans un repère les points correspondants aux résultats déjà obtenus

Le résultat ici mobilisé est le suivant : « lorsqu'il y a proportionnalité entre deux grandeurs, la courbe représentative de la fonction exprimant l'une en fonction de l'autre est une droite passant par l'origine ».

On peut ici placer les points (70 ; 17,5) et (280 ; 28). On constate que si ces points sont bien alignés (deux points le sont toujours), la droite qui les porte ne passe pas par l'origine.

On pouvait aussi placer en plus le point (0 ; 14) qui se déduit de l'énoncé, et qui rend le constat évident.

Toujours en se référant au registre graphique, on pouvait même se contenter de citer ce seul point (0 ; 14). Et dire que, puisque la courbe représentative ne passe pas par l'origine, il ne peut y avoir situation de proportionnalité.

1) Valeur(s) possible(s) pour p

Un nombre dont la valeur approchée par excès à 10^{-3} près est 1,118 est compris entre 1,117 et 1,118 (précisons qu'il peut être égal à 1,118 mais pas à 1,117).

Ainsi le nombre entier p doit vérifier la double inégalité $1,117 < \frac{p}{1789} \leq 1,118$.

D'où $1789 \times 1,117 < p \leq 1789 \times 1,118$; d'où $1998,313 < p \leq 2000,102$.

Il y a donc deux valeurs possibles pour p : 1999 et 2000.

2) Comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

2) a) Comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Conjecture

Le but de cette question étant d'établir une conjecture, on peut pour y répondre utiliser trois méthodes.

Méthode 1 :

Comparer les fractions après les avoir réduits au même dénominateur. Cette méthode plus calculatoire a l'avantage de se généraliser (cf. question b).

Méthode 2 :

S'appuyant sur les valeurs exactes ou approchées de ces quotients obtenues à la calculatrice, méthode que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser mais qui ne se généralise pas et trouve ces limites lorsque les nombres sont grands et dépassent les capacités des calculatrices, ce qui est le cas pour beaucoup d'entre elles à la question c).

Méthode 3 :

Écrire les fractions sous la forme $1 - \frac{1}{a}$ avec a entier naturel non nul et comparer ces écritures. Cette méthode qui nécessite au préalable une transformation d'écriture a le mérite de fournir une explication simple des résultats obtenus. Et comme comparer $1 - \frac{1}{a}$ et $1 - \frac{1}{b}$ revient à comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, elle permet une démonstration rapide du résultat général (cf. question suivante).

En détail :

Méthode 1 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ et } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ . Donc } \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \text{ .}$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = \frac{12 \times 14}{13 \times 14} = \frac{168}{182} \text{ et } \frac{13}{14} = \frac{13 \times 13}{14 \times 14} = \frac{169}{182} \text{ . Donc } \frac{12}{13} < \frac{13}{14} \text{ .}$$

$$\checkmark \quad \frac{176}{177} = \frac{176 \times 178}{177 \times 178} = \frac{31328}{177 \times 178} \text{ et } \frac{177}{178} = \frac{177 \times 177}{177 \times 178} = \frac{31329}{177 \times 178} \text{ . Donc } \frac{176}{177} < \frac{177}{178} \text{ .}$$

Méthode 2 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = 0,5 \text{ et } \frac{2}{3} = 0,66\overline{6} \text{ Donc } \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \text{ .}$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = 0,92307\overline{6} \text{ ... et } \frac{13}{14} = 0,928571\overline{4} \text{ Donc } \frac{12}{13} < \frac{13}{14} \text{ .}$$

$$\checkmark \quad \frac{176}{177} \approx 0,99435028 \text{ et } \frac{177}{178} \approx 0,99438 \text{ . Donc } \frac{176}{177} < \frac{177}{178} \text{ .}$$

Dans les deux premiers cas, il s'agit de valeurs exactes (même si certaines sont illimitées périodiques), dans le dernier cas la comparaison se fait à partir de valeurs approchées.

Méthode 3 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}. \quad \text{Or } \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{ d'où } 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{2}. \quad \text{Donc } \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13} \text{ et } \frac{13}{14} = 1 - \frac{1}{14}. \quad \text{Or } \frac{1}{14} < \frac{1}{13}, \text{ d'où } 1 - \frac{1}{14} > 1 - \frac{1}{13}. \quad \text{Donc } \frac{12}{13} < \frac{13}{14}.$$

$$\checkmark \quad \text{De même, } \frac{176}{177} < \frac{177}{178}. \quad (\text{On peut éventuellement détailler les calculs, comme précédemment})$$

$$\frac{176}{177} = 1 - \frac{1}{177} \text{ et } \frac{177}{178} = 1 - \frac{1}{178}. \quad \text{Or } \frac{1}{178} < \frac{1}{177}, \text{ d'où } 1 - \frac{1}{178} > 1 - \frac{1}{177}. \quad \text{Donc } \frac{176}{177} < \frac{177}{178}.)$$

En se basant sur les trois exemples étudiés, **on peut conjecturer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n-1}{n}$ est toujours inférieur à $\frac{n}{n+1}$.**

2) b) Démonstration du résultat

Méthode 1 : Écrire les fractions sous la forme de la différence d'un entier et d'une fraction de numérateur 1 (forme $1 - \frac{1}{a}$ vue précédemment).

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or n est un entier naturel non nul.

$$\text{Donc } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ d'où } -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \text{ d'où } 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \text{ d'où } \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}.$$

Méthode 2 : Mettre sur un même dénominateur les deux nombres.

Ce dénominateur commun est tout simplement le produit des deux dénominateurs.

On a donc :

$$\frac{n-1}{n} = \frac{(n-1) \times (n+1)}{n \times (n+1)} = \frac{n^2-1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{n \times n}{n \times (n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)}$$

Comme $n^2 - 1$ est toujours strictement inférieur à n^2 (et que les dénominateurs sont positifs), on a bien pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

2) c) Comparaison des nombres $\frac{987654322}{987654323}$ et $\frac{987654321}{987654322}$ sans effectuer de calcul

Remarque :

Attention, les deux nombres ne sont pas ici donnés dans le même ordre qu'à la question a).

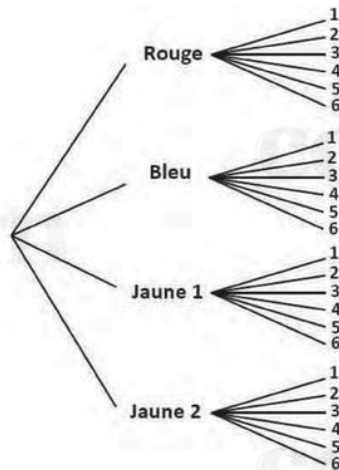
En posant $n = 987654322$, on a $n - 1 = 987654321$ et $n + 1 = 987654323$.

En appliquant le résultat de la question b), on obtient :

$$\frac{987654321}{987654322} < \frac{987654322}{987654323}.$$

Méthode 1 :

On peut utiliser un arbre pour représenter les différentes issues possibles de ces deux évènements successifs (et indépendants).



1) Probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

Les deux dés sont bien équilibrés, nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.

L'évènement E_1 dont on cherche la probabilité peut se formuler en : « obtenir la face rouge » ET PUIS « obtenir la face 4 ».

Il n'est réalisé sur une seule des 24 branches équiprobables de l'arbre ci-dessus.

La probabilité de E_1 est donc : $p_1 = \frac{1}{24}$.

2) Probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

L'évènement E_2 dont on cherche la probabilité peut se formuler en : « obtenir une face jaune » ET PUIS « obtenir une face impaire ».

Il est réalisé pour 6 des 24 branches équiprobables de l'arbre ci-dessus (Jaune1 puis face 1, 3 ou 5 ; Jaune2 puis face 1, 3 ou 5).

La probabilité de E_2 est donc : $p_2 = \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$.

Remarque :

On pouvait aussi, sans utiliser l'arbre ci-dessus, répondre aux deux questions à l'aide de la formule : $P(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B)$ qui permet de calculer la probabilité de la réalisation simultanée de deux évènements indépendants.

Pour E_1 on l'applique avec A : « obtenir la face rouge » et B : « obtenir la face 4 ».

La probabilité de E_1 est donc : $p_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

Pour E_2 on l'applique avec A : « obtenir une face jaune » et B : « obtenir une face impaire ».

La probabilité de E_2 est donc : $p_2 = \frac{2}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Méthode 2 :

Les deux évènements, résultats des lancers du dé 1 et du dé 2, sont indépendants. On peut aussi représenter la situation à l'aide d'un tableau à double entrée, une ligne pour chaque face du dé 1 (donc 4 lignes) et une colonne pour chaque face du dé 2 (donc 6 colonnes), chaque case correspondant alors à une des 24 issues équiprobables possibles.

Dé 1	Dé 2	1	2	3	4	5	6
R					Q1		
B							
J1		Q2		Q2			Q2
J2		Q2		Q2			Q2

1) Probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

Il y a un seul cas favorable (Q1) sur les 24 cas possibles, d'où $p_1 = \frac{1}{24}$.

2) Probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

Il y a 6 cas favorables (Q2) sur les 24 cas possibles, d'où $p_2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.