

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci-dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

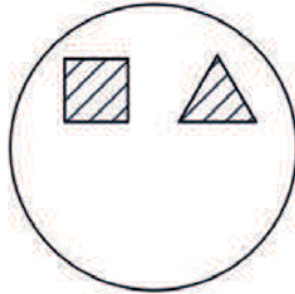


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

PARTIE A : étude de la situation concrète

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

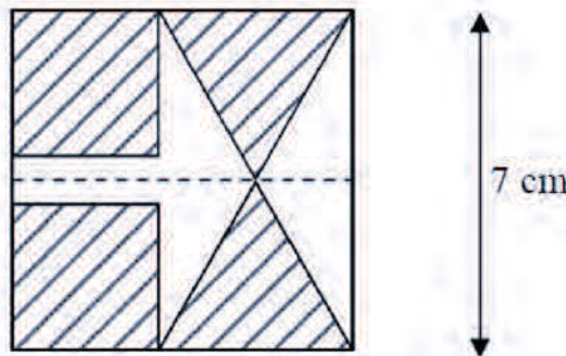


Figure 2

dans lequel les figures hachurées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

- 1) a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *figure 2*. Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?
- 2) Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

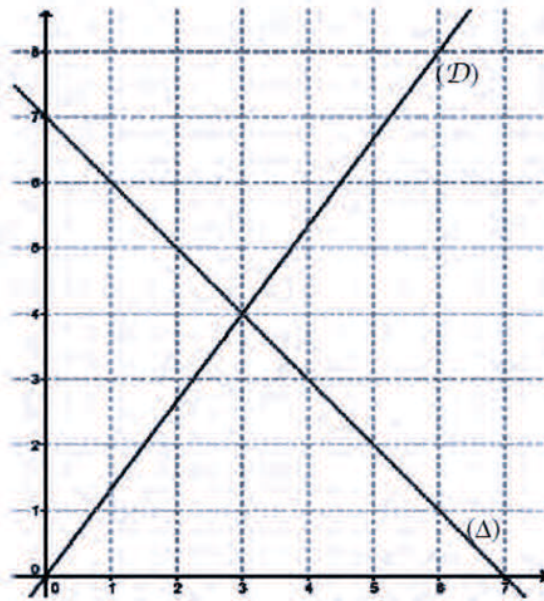
Pour cela, il appelle x le côté du carré hachuré et y celui du triangle équilatéral hachuré.

a) Expliquer pourquoi si x et y sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

b) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{4}{3}x \quad \text{et} \quad g(x) = 7 - x$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

c) Résoudre par le calcul le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ et en déduire la solution au problème.

3) Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm, 420×197. Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

PARTIE B : démonstration de résultats mathématiques

1) Démontrer le résultat rappelé à la question A 1) a) :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) Dans cette question, on considère un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.

b) Exprimer l'aire A_1 du carré et l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x .

En déduire le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A 1) b).

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

- 1) La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?
- 2) Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



Exemple de peson à ressort. Source : Wikipédia

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge. Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.

Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.

Chaque fois que l'on ajoute 10 g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5 cm.

- 1) Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?
- 2) L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?
- 3) La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

- 1) On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.

Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118.

On sait de plus que $q = 1789$.

Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

- 2) L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

- a) Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Quel résultat général peut-on conjecturer ?

- b) Démontrer ce résultat.

- c) Comparer les nombres $\frac{987\ 654\ 322}{987\ 654\ 323}$ et $\frac{987\ 654\ 321}{987\ 654\ 322}$ sans effectuer de calcul.

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.

Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.

Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On suppose les deux dés bien équilibrés.

On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose.

Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.