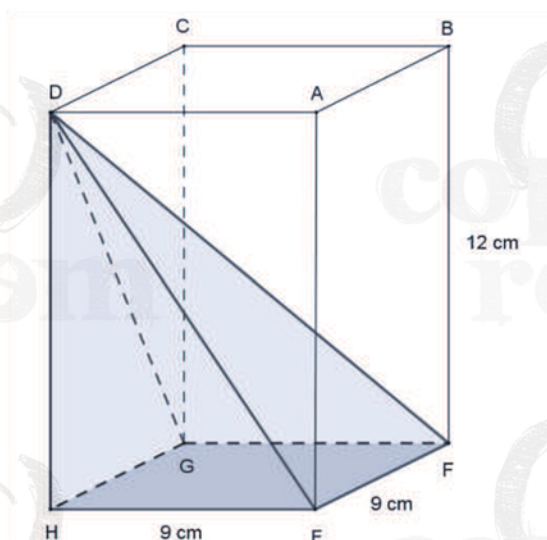




PARTIE A - Réalisation d'un patron de la pyramide

1) a) Longueurs DE et DG

Toutes les faces du pavé droit sont des rectangles.

[DE] et [DG] sont les diagonales d'un rectangle de 12 cm sur 9 cm. Elles ont la même longueur.

Le triangle DHE est rectangle en H. La longueur DH est 12 cm.

D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle DHE, $DE^2 = HE^2 + HD^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ donc $DE = 15$ cm.

On conclut que $DE = DG = 15$ cm.

1) b) Nature des triangles DGF et DEF

Le triangle DGF est rectangle en G.

Le triangle DEF est rectangle en E.

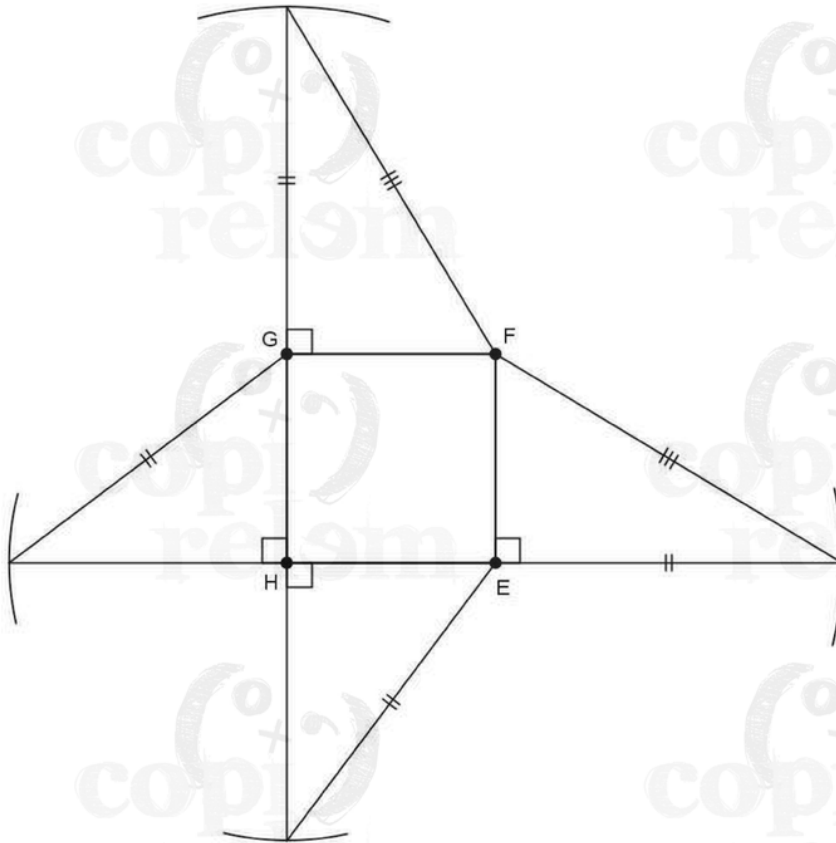
Justification (non demandée) :

Dans le pavé droit, la droite (GF) est orthogonale au plan (DHG) en G, elle est donc perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par G, donc la droite (GF) est perpendiculaire à la droite (DG) : DGF est un triangle rectangle en G. De même, (EF) est orthogonale au plan (DHE) donc la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (DE) et DEF rectangle en E.

2) Tracé du patron à l'échelle 1/3

À l'échelle 1/3, les dimensions du pavé droit sont 3 cm, 3 cm et 4 cm.

Un exemple de patron possible est donné en page suivante.



PARTIE B - Étude d'un cas particulier

$JH = 2\text{ cm}$

1) Nature du quadrilatère JKLM

La section est faite parallèlement à la base, donc le quadrilatère JKLM est une réduction du quadrilatère EFGH. Ces deux quadrilatères sont donc de même nature. Comme les faces d'un pavé droit sont des rectangles, EFGH est un rectangle. Comme sa longueur et sa largeur mesurent 9 en cm, c'est un carré.

Autre justification possible :

En considérant que dans l'énoncé, il est précisé que la pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, la justification suivante est acceptée.

La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, les quadrilatères JKLM et EFGH sont de même nature. EFGH est une face du pavé droit, c'est un rectangle. $HG = EF = 9\text{ cm}$, EFGH est donc un carré.

JKLM est un carré.

2) Longueurs JK et JM

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH], K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{10\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{JK}{9\text{ cm}} \quad \text{soit} \quad JK = \frac{9\text{ cm} \times 10}{12} = 7,5\text{ cm}$$

Comme JKLM est un carré, **$JK = JM$ et $JK = JM = 7,5\text{ cm}$**

Autre méthode :

On peut identifier le rapport k de réduction des longueurs entre les deux pyramides :

$$k = \frac{DJ}{DH} = \frac{JH}{DH} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Dans cette réduction, toutes les longueurs de DJKLM sont obtenues par multiplication des longueurs correspondantes de DEFGH par $\frac{5}{6}$.

Par conséquent, $JK = JM = \frac{5}{6} \times 9 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$

3) Volume B de sable blanc et le volume R de sable rouge contenus dans la pyramide

Le sable blanc est contenu dans la pyramide DJKLM, dont la base est un carré de 7,5 cm de côté et la hauteur est 10 cm.

$$B = \frac{1}{3} \times 7,5 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 187,5 \text{ cm}^3$$

Le volume de sable rouge s'obtient en faisant la différence entre le volume de la pyramide DEFGH et le volume de la pyramide DJKLM :

$$v(\text{DEFGH}) = \frac{1}{3} \times 9 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 324 \text{ cm}^3$$

$$R = 324 \text{ cm}^3 - B = 324 \text{ cm}^3 - 187,5 \text{ cm}^3 = 136,5 \text{ cm}^3$$

Le volume de sable blanc est 187,5 cm³ et le volume de sable rouge est 136,5 cm³.

Autre méthode pour calculer B :

On peut calculer le volume de la pyramide DEFGH (324 cm³, voir ci-dessus) puis en déduire le volume de la pyramide réduite DJKLM en multipliant par k^3 .

$$B = 324 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 324 \text{ cm}^3 \times \frac{125}{216} = 187,5 \text{ cm}^3$$

PARTIE C - Étude du cas général

Soit $JH = x$

1) Valeurs possibles pour x

Comme le point J est un point du segment $[HD]$, les valeurs possibles pour x sont les nombres compris entre 0 et 12.

On peut aussi écrire : x appartient à $[0;12]$ (ou $]0;12[$ si on considère qu'on doit avoir du sable de deux couleurs).

Remarque :

Les nombres x considérés sont des réels, toute réponse faisant intervenir des nombres entiers (0, 1, 2..., 12) ou décimaux (de 0,1 à 11,9) n'est pas acceptable. Elle dénote une conception erronée d'une longueur qui est une grandeur continue.

2) a) Volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Le volume de sable blanc pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de B qui a pour abscisse 5. On lit $B(5) \approx 65 \text{ cm}^3$

Le volume de sable rouge pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de R qui a pour abscisse 5. On lit $R(5) \approx 260 \text{ cm}^3$

Remarques :

Dans une lecture graphique, on admet une marge d'erreur (2 cm³ par exemple) ce qui donnerait pour $B(5)$ toute valeur comprise entre 63 cm³ et 67 cm³.

Il est attendu ici deux lectures graphiques et non la lecture d'une valeur et la déduction de l'autre par le calcul (la somme des deux volumes est 324 cm³).

2) b) Volumes respectifs de sable blanc et de sable blanc dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, la hauteur de sable rouge est $12 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$.

On lit $B(7) \approx 23 \text{ cm}^3$ et $R(7) \approx 301 \text{ cm}^3$

2) c) Hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux

La hauteur de sable rouge pour laquelle les deux volumes de sable sont égaux s'obtient en lisant l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. On lit $x \approx 2,4$ cm soit x compris entre 2 cm et 3 cm (ou tout encadrement d'amplitude 1 cm contenant 2,4 cm).

3) a) $B(x) = 0,1875 (12 - x)^3$

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH], K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{12-x}{12} = \frac{JK}{9} \quad \text{c'est-à-dire} \quad JK = \frac{9 \times (12-x)}{12} = 0,75(12 - x)$$

Le volume de sable blanc est le volume de la pyramide DJKLM, de base carrée de côté $0,75(12 - x)$ et de hauteur $(12 - x)$.

$$B(x) = \frac{1}{3} \times 0,75(12 - x) \times 0,75(12 - x) \times (12 - x) = \frac{1}{3} \times 0,75^2 \times (12 - x)^3 = 0,1875(12 - x)^3$$

3) b) Valeurs exactes des réponses aux questions C 2) a)

Les valeurs exactes des réponses aux questions C2a sont $B(5)$ et $R(5)$, l'unité de volume étant le cm^3 :

$$B(5) = 0,1875(12 - 5)^3 = 0,1875 \times 7^3 = \mathbf{64,3125}$$

$$R(5) = 324 - 64,3125 = \mathbf{259,6875}$$

Rappel : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ donc $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

$10 \text{ j} = 10 \times 24 \times 60 \text{ min} = 14400 \text{ min}$

Si on perd 3 L d'eau par minute, en 14400 min, on en perd 14400 fois plus.

Ainsi, la quantité d'eau perdue est : $3 \text{ L} \times 14400 = 43200 \text{ L} = 43,2 \text{ m}^3$

Un m^3 d'eau coûte 3,50 € donc $43,2 \text{ m}^3$ coûtent : $43,2 \times 3,50 \text{ €} = 151,20 \text{ €}$

Les conséquences financières de la négligence de Carole s'élèvent à 151,20 €

Autre présentation en utilisant toutes les unités de grandeurs dans les calculs.

Le volume d'eau perdue est

$10 \text{ j} \times 24 \text{ h/j} \times 60 \text{ min/h} \times 3 \text{ L/min} = 43\,200 \text{ L} = 43\,200 \text{ dm}^3 = 43,2 \text{ m}^3$

Le prix de cette quantité d'eau perdue est :

$43,2 \text{ m}^3 \times 3,5 \text{ €/m}^3 = 151,20 \text{ €}$

On peut réaliser le tableau à double entrée de toutes les sommes possibles avec deux dés à 6 faces. Un arbre convient également.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Toutes les 36 issues sont équiprobables.

La probabilité de faire 5 est le quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles soit $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

La probabilité de faire 7 est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$ donc l'affirmation qu'il y a autant de chance de faire 5 que de faire 7 n'est pas exacte.

Remarque :

Sans s'appuyer sur une représentation sous forme d'arbre ou de tableau, le nombre d'issues possibles et les nombres d'issues favorables peuvent se déterminer comme suit.

Les deux dés étant à six faces, on associe chaque face d'un dé aux six faces de l'autre. Le nombre d'issues possibles est $6 \times 6 = 36$.

Il y a 4 issues favorables pour que la somme des nombres obtenus sur les deux dés soit égale à 5 : 1 et 4 ; 2 et 3 ; 3 et 2 ; 4 et 1.

Il y a 6 issues favorables pour que la somme des nombres obtenus sur les deux dés soit égale à 7 : 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4 ; 4 et 3 ; 5 et 2 ; 6 et 1.

Remarque :

Pour ce cas précis, un raisonnement consistant à ne pas différencier les deux dés, c'est à dire qu'il y a plus de « façons » d'obtenir 7 (6+1 ; 5+2 ; 4+3) que d'obtenir 5 (4+1 ; 3+2) suffit à conclure que l'affirmation est inexacte. Cependant, ce raisonnement n'est pas généralisable. Il n'est par exemple plus valable dans le cas des sommes 6 et 7.

La moyenne des salaires se calcule en divisant la somme des salaires cumulés par le nombre de personnes.

Le salaire cumulé des femmes est $3 \times 1700 \text{ €} = 5100 \text{ €}$

Le salaire cumulé des hommes est $1250 \text{ €} + 1400 \text{ €} + 1600 \text{ €} + 3200 \text{ €} = 7450 \text{ €}$

Pour que les moyennes soient égales, il faut que les salaires cumulés soient égaux.

Le salaire de la quatrième femme doit être $7450 \text{ €} - 5100 \text{ €} = 2350 \text{ €}$

Autre rédaction :

Après avoir calculé les salaires cumulés des femmes et des hommes, on traduit par une équation l'égalité des salaires moyens.

Soit x le salaire de la quatrième femme qui sera embauchée, on a alors :

$$5100 + \frac{x}{4} = \frac{7450}{4}$$

On en déduit $x = 2350 \text{ €}$.

Pour que le salaire moyen des hommes et des femmes de l'entreprise soit égal, il faut que la quatrième femme reçoive un salaire de 2350 €.

Remarque :

La donnée du salaire médian et de l'étendue des salaires des femmes permet de calculer les salaires des trois employées. Cependant, cela nécessite de calculer le salaire cumulé qui suffit à déterminer ce que l'on cherche. Ce sont donc des données inutiles dans ce problème.

Le fleuriste veut composer des bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs, le nombre de bouquet est un diviseur commun de 12 et 18.

Méthode 1 : utilisant le PGCD

On décompose 12 et 18 en produit de facteurs premiers :

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 6 \times 2$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 6 \times 3$$

Le PGCD de 12 et 18 est 6. On peut faire au maximum 6 bouquets, les nombres de bouquets possibles sont les diviseurs de ce PGCD.

On peut faire :

- 6 bouquets avec 2 tulipes et 3 roses
- 3 bouquets avec 4 tulipes et 6 roses
- 2 bouquets avec 6 tulipes et 9 roses
- 1 bouquet avec 12 tulipes et 18 roses (cette possibilité n'est pas retenue compte tenu que l'énoncé précise que le fleuriste veut constituer plusieurs bouquets).

Note : le PGCD peut également être calculé en utilisant l'algorithme d'Euclide ou l'algorithme des soustractions successives.

Méthode 2 (compte tenu de la taille des nombres en jeu) :

On écrit la liste des diviseurs de 12 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12) et la liste des diviseurs de 18 (1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18). Un nombre de bouquets possibles est un diviseur commun à 12 et 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6. Il reste à trouver la composition des bouquets ainsi formés (voir plus haut).

Méthode 3 (compte tenu de la taille des nombres en jeu) :

On peut écrire 12 comme produit de deux nombres entiers naturels de trois manières différentes :

$$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4.$$

De même, on peut écrire : $18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$.

On déduit alors les bouquets possibles (voir plus haut).

Méthode 4 :

On peut tester toutes les possibilités de bouquets, de 1 à 12 (car il y a 12 tulipes).

On écarte tous les bouquets pour lesquels il reste des fleurs non utilisées et on retrouve ainsi les trois solutions.