

Dans ce problème on propose de démontrer une formule peu connue pour calculer les aires des polygones de Pick, c'est-à-dire dont les sommets sont construits sur des réseaux pointés à maille carrée et sont non alignés.

PARTIE A - Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

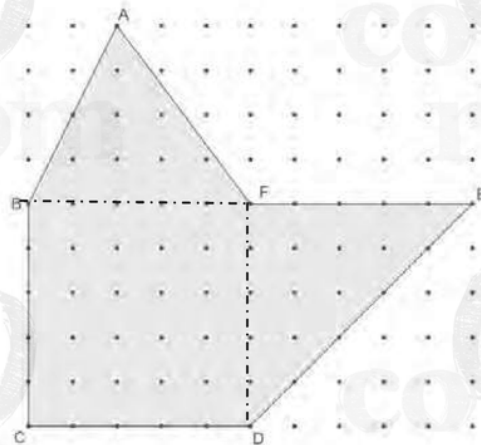
Calcul de l'aire de ABCDEF par des méthodes usuelles

Méthodes 1 : par mise en évidence de surfaces de référence

Différentes méthodes utilisant des surfaces de référence sont envisageables : nous en présentons trois.

Méthode 1.1. : par décomposition du polygone en un carré et deux triangles

En utilisant la propriété d'additivité des aires, l'aire du polygone ABCDEF est la somme de l'aire du carré BFDC et de l'aire des deux triangles DFE et ABF.



L'aire de ces différentes figures composant ABCDEF peut se calculer à l'aide de la formule donnant l'aire d'un carré (carré de la longueur du côté) et celle donnant l'aire d'un triangle (produit de la demi-hauteur par la base) :

- aire (BFDC) = BF^2 ;
- aire (DFE) = $\frac{DF \times FE}{2}$;
- aire (ABF) = $\frac{BF \times AH}{2}$ avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF ;

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, aire (ABCDEF)} &= \text{aire(BFDC)} + \text{aire(DFE)} + \text{aire(ABF)} = (5 \text{ u.l.})^2 + \frac{5 \text{ u.l.} \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2} \\ &= (25 + 12,5 + 10) \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Méthode 1.2. : décomposition du polygone en un trapèze et un triangle

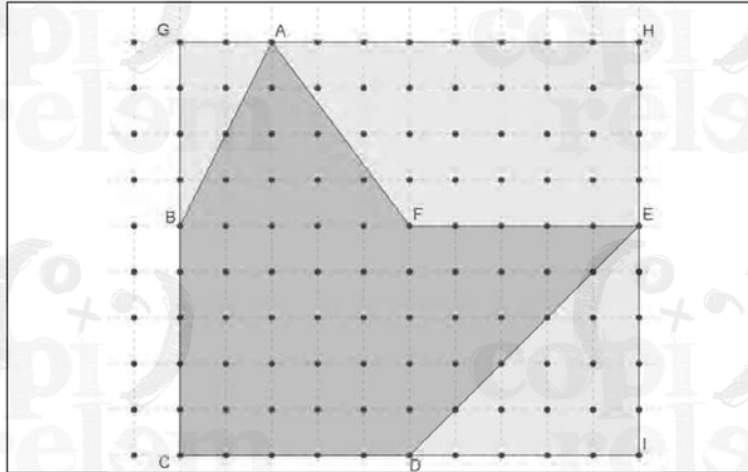
On reprend la méthode précédente : le polygone ABCDEF est composé du trapèze BCDE et du triangle ABF (avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF).

$$\text{aire(ABCDEF)} = \text{aire(BCDE)} + \text{aire(ABF)} = \frac{(BE+CD) \times BC}{2} + \frac{BF \times AH}{2} = \frac{(10 \text{ u.l.} + 5 \text{ u.l.}) \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2}$$

$$\text{aire(ABCDEF)} = (37,5 + 10) \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

Méthode 1.3 : une méthode par complémentation

En utilisant la propriété d'additivité des aires, avec les notations de la figure ci-après, l'aire du polygone ABCDEF est la différence de l'aire du rectangle CGHI et de la somme des aires des deux triangles BGA et DEI, et du trapèze AHEF.



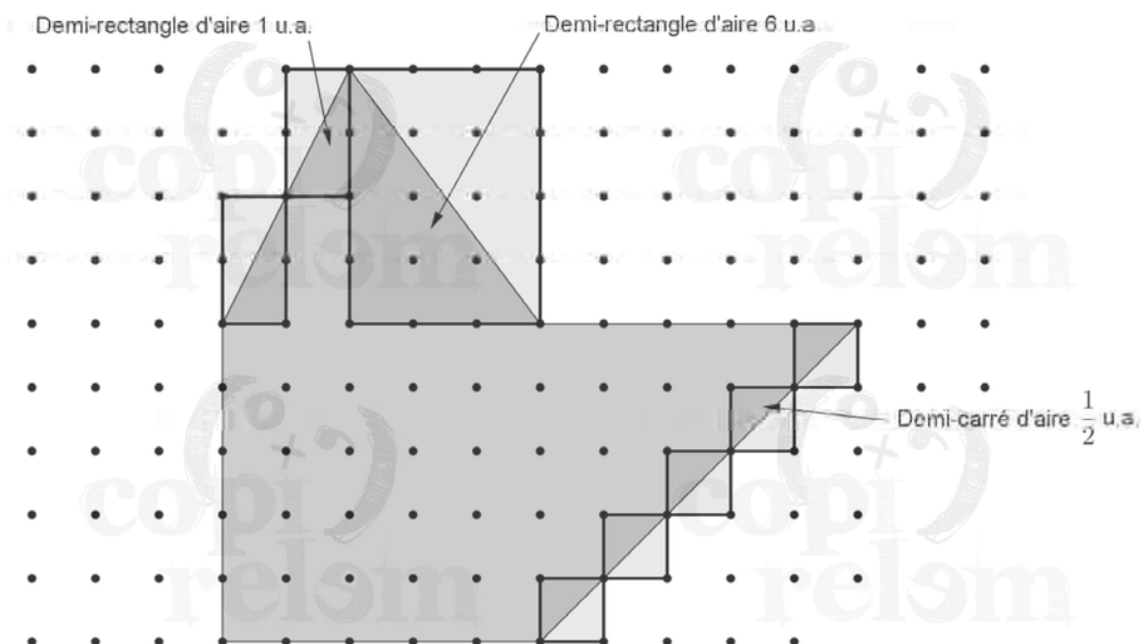
$$\text{aire}(ABCDEF) = \text{aire}(CGHI) - \text{aire}(BGA) - \text{aire}(DEI) - \text{aire}(AHEF)$$

$$= CG \times GH - \frac{BG \times GA}{2} - \frac{DI \times IE}{2} - \frac{(AH + FE) \times HE}{2}$$

$$= \left(9 \times 10 - \frac{4 \times 2}{2} - \frac{5 \times 5}{2} - \frac{(8 + 5) \times 4}{2} \right) \text{u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

Méthode 2 : par pavage par des surfaces unités

On peut paver le polygone avec des carrés de côté 1 u.l. (d'aire 1 u.a.), des triangles « demi-carrés » et des triangles « demi-rectangles » comme suggéré par la figure ci-après :



Par pavage, avec les notations de la figure ci-dessus, on obtient :

$$\text{aire}(ABCDEF) = 2 \times 1 \text{ u.a.} + 6 \text{ u.a.} + 5 \times 0,5 \text{ u.a.} + 37 \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

PARTIE B - Utilisation de la formule de Pick sur des exemples

1) En appliquant la formule de Pick au polygone ABCDEF

On dénombre sur la figure : $i = 37$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDEF) et $b = 23$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick, on obtient :

$$\text{aire}(\text{ABCDEF}) = \left(37 + \frac{23}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (37 + 11,5 - 1) \text{ u. a.} = 47,5 \text{ u. a.}$$

On retrouve la valeur obtenue pour l'aire de ABCDEF dans la question A.

2) En appliquant la formule aux polygones ABCDF et DEF

Pour le pentagone ABCDF, on dénombre sur la figure : $i = 27$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDF) et $b = 18$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone ABCDF).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick, on obtient pour ABCDF :

$$\text{aire}(\text{ABCDF}) = \left(27 + \frac{18}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (27 + 9 - 1) \text{ u. a.} = 35 \text{ u. a.}$$

Pour le triangle DEF, on dénombre sur la figure : $i = 6$ et $b = 15$.

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick donnée, on obtient pour DEF :

$$\text{aire}(\text{DEF}) = \left(6 + \frac{15}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (6 + 7,5 - 1) \text{ u. a.} = 12,5 \text{ u. a.}$$

Ainsi,

- aire (ABCDF) + aire (DEF) = 35 u.a. + 12,5 u.a. = 47,5 u.a. ;
- aire (ABCDEF) = 47,5 u.a. (question B1) ;

La somme des résultats obtenus est bien égale au résultat trouvé à la question B1.

Remarque :

La propriété d'additivité est à considérer avec prudence : en réunissant ces surfaces pour recomposer ABCDEF, les aires sont additionnées mais ce n'est pas le cas pour le nombre de points intérieurs, ni pour le nombre de points sur le bord.

PARTIE C - Quelques conséquences de la formule de Pick

On admet dans cette partie que la formule de Pick est valide et on étudie quelques propriétés des polygones de Pick d'aire donnée.

1) Preuve de l'inexistence d'un polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

Si b est pair, $\frac{b}{2}$ est un nombre entier donc $i + \frac{b}{2} - 1$ est une somme de nombres entiers donc est un nombre entier, et ne peut donc pas être égal à 7,5.

Il n'existe donc pas de polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

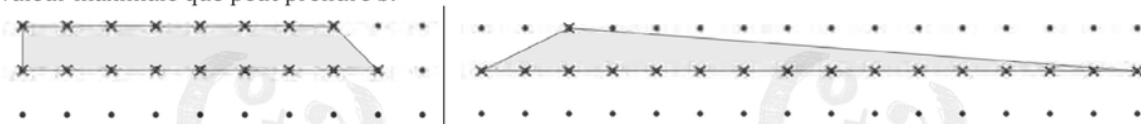
2) Valeur maximale du nombre b pour un polygone de Pick d'aire 7,5 :

Avec les notations précédentes, on a :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 = 7,5 \text{ soit } b = 2(7,5 + 1 - i) = 17 - 2i.$$

Comme i est un nombre entier, i est positif ou nul, donc $b = 17 - 2i$ est au plus égal à 17 : 17 est donc un majorant de b .

De plus, les surfaces ci-après, d'aire 7,5 u.a., et pour lesquelles $b = 17$, réalisent ce cas : 17 est donc bien la valeur maximale que peut prendre b .



Remarque :

Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

3) Polygones de Pick d'aire 7,5 u.a. contenant un seul point intérieur

Avec les notations précédentes, si $A = 7,5$ et $i = 1$, on obtient : $b = 2(7,5 + 1 - i) = 15$.

Les figures ci-dessous sont des exemples de polygones de Pick vérifiant ces conditions.



Remarque :

Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

4) Nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick dont l'aire est donnée

Soit un polygone de Pick d'aire A u.a.. La formule de Pick est : $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

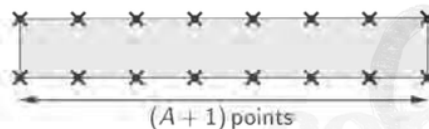
Le nombre de points du réseau sur le bord du polygone est : $b = 2(A + 1 - i) = 2A + 2 - 2i$.

Comme i (nombre entier de points intérieurs) est positif ou nul, b est majoré par $2A + 2$: le nombre de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. est donc majoré par $2A + 2$.

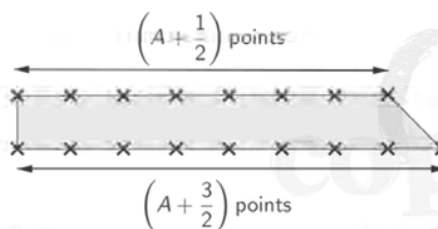
Il reste à justifier qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points sur le bord est $2A + 2$; pour cela, il suffit de montrer qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points intérieurs est nul (c'est-à-dire pour lequel $i = 0$).

Le nombre A est *a priori* un nombre positif (pas nécessairement entier). Cependant, la formule de Pick (admise) montre qu'il y a en fait deux cas possibles pour la nature du nombre de A , en fonction de la parité du nombre b (qui lui désigne le nombre de points du bord, et est donc nécessairement un nombre entier) :

- cas où b est pair : A est alors un nombre entier ; le rectangle ci-dessous, de dimensions 1 u.l. et A u.l., convient (la mesure de son aire est A , il n'a aucun point intérieur, et $2(A + 1) = 2A + 2$ points sur son bord) :



- cas où b est impair : A est alors un nombre de la forme $N + \frac{1}{2}$, où N est un entier, et le trapèze ci-dessous, de dimensions $(A - \frac{1}{2})$ u.l. et $(A + \frac{1}{2})$ u.l. convient (la mesure de son aire est $A = (A - \frac{1}{2}) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$, il n'a aucun point intérieur, et $2(A + 1) = 2A + 2$ points sur son bord) :



Donc il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire donnée sans point intérieur ($i = 0$).

Le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée est donc bien $2A + 2$.

PARTIE D - Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

1) a) Expression de b en fonction de L et l

Le nombre de points du réseau sur chacun des côtés de longueur L du rectangle est $L + 1$ et sur chacun des côtés de largeur l du rectangle est $l + 1$.

Le nombre total de points du réseau sur le bord du rectangle est :

$$b = 2(L + 1) + 2(l + 1) - 4 = 2L + 2l.$$

On a retiré 4 pour ne pas compter deux fois les quatre sommets du rectangle.

Autres méthodes :

* On a $L + 1$ points pour chacun des côtés de longueur L et il reste à ajouter les points « intérieurs » des côtés de largeur l , soit $l - 1$ points car les extrémités ont déjà été comptées, soit :

$$2 \times (L + 1) + 2(l - 1) = 2L + 2l$$

* On dénombre en parcourant le bord du rectangle, côté par côté : L points pour la première longueur sans compter la deuxième extrémité qu'on va compter en parcourant la première largeur, l points pour la première largeur et etc ; on arrive à : $L + l + L + l = 2(L + l)$

1) b) Expression de i en fonction de L et l :

Le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle peut être calculé de différentes manières :

- en considérant directement le rectangle intérieur :

$$i = (L - 1) \times (l - 1) = L \times l - L - l + 1$$

- en considérant le grand rectangle et en utilisant l'expression de b :

$$i = (L + 1) \times (l + 1) - b = L \times l + L + l + 1 - 2L - 2l = L \times l - L - l + 1.$$

2) Preuve de la formule de Pick pour un rectangle de Pick dont les côtés sont parallèles au réseau :

D'après la formule de Pick, en remplaçant i et b par les expressions établies ci-dessus, on obtient :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (L \times l - L - l + 1) + \frac{2L + 2l}{2} - 1 = L \times l - L - l + 1 + L + l - 1 = L \times l.$$

Ainsi, la formule de Pick appliquée un rectangle de Pick aux côtés parallèles au réseau, donne bien la formule de l'aire du rectangle.

Remarques complémentaires :

On utilise dans ce problème deux grandes méthodes de calcul d'aire :

- la méthode sur les décompositions-recompositions d'aires, s'appuyant sur la propriété d'additivité ;
- la méthode utilisant les formules de calcul des aires de figures de référence (triangle, parallélogramme, trapèze...).

On rappelle ici qu'il existe une autre méthode, reposant sur les propriétés des transformations géométriques du plan (conservation des aires pour les isométries, multiplication par le carré du rapport d'agrandissement ou de réduction).

Par ailleurs, sur les aires, on pourra lire les articles suivants, accessibles sur la toile :

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie.

Petit x. n° 6 et n° 8. IREM de Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989-1990) L'aire et la mesure. Petit x. n° 24. IREM de Grenoble.

Remarque préliminaire :

L'énoncé semble considérer que « positif » est à interpréter comme « strictement positif ». C'est une convention peu habituelle, mais nous la respectons pour la cohérence du sujet et du corrigé.

Dans cet exercice, il s'agit de trouver deux nombres entiers positifs A et B satisfaisant trois contraintes :

- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- $A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Deux de ces contraintes portent sur un des deux nombres A et B et la troisième sur une relation entre les deux nombres A et B.

La première contrainte porte sur A qui doit être un diviseur de 111.

La décomposition en produit de nombres premiers de 111 est : $111 = 3 \times 37$.

Les diviseurs de 111, donc les valeurs possibles pour A, sont : 1 ; 3 ; 37 ; 111.

La troisième contrainte concerne B. La liste des nombres satisfaisant cette contrainte est :

$1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; etc.

La deuxième contrainte a les conséquences suivantes :

$A - B$ est un nombre positif ou nul, donc A est supérieur ou égal à B.

Comme A est un diviseur de 111, A est inférieur ou égal à 111, donc B est le cube d'un nombre entier, et est inférieur à 111.

Ceci permet de restreindre les valeurs possibles pour B : 1 ; 8 ; 27 ; 64.

$A - B$ est divisible par 10. Donc $A - B = 10 \times k$, où k est un entier positif ou nul.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs possibles de la différence « $A - B$ », correspondant aux valeurs de A données en colonnes et à celles de B données en ligne.

A \ B	1	3	37	111
1	0	2	36	110
8	-	-	29	103
27	-	-	10	84
64	-	-	-	47

Il fait apparaître trois nombres multiples de dix : 0, 10 et 110, donc les seules réponses possibles au problème sont : **A = 1 et B = 1** ; **A = 37 et B = 27** ; **A = 111 et B = 1**.

Le tableau a été construit de manière à satisfaire la contrainte sur A en première ligne, sur B en première colonne et sur $A - B$ en sélectionnant les seules cases multiples de 10. Donc ces trois couples sont bien les seules solutions du problème.

Les informations à utiliser pour répondre aux différentes questions sont données par le graphique présentant un segment de droite qui représente le volume de glace (en litre) en ordonnée, en fonction du volume d'eau liquide (en litre) en abscisse. Dans les deux cas, l'intervalle entre deux graduations entières successives correspond à un litre.

1) Volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide

Une lecture directe permet de déterminer ce nombre qui correspond à l'ordonnée du point du segment d'abscisse 7, c'est-à-dire environ 7,5.

Avec 7 litres d'eau liquide, on obtient environ 7,5 litres de glace.

2) Volume d'eau liquide à mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace

Une lecture directe permet de déterminer ce nombre qui correspond à l'abscisse du point du segment d'ordonnée 9. Cette abscisse est comprise entre 8,1 et 8,5.

Il faut entre 8,1 et 8,5 litres d'eau liquide pour obtenir 9 litres de glace.

3) Caractérisation de la relation entre le volume de glace et le volume d'eau liquide

La représentation graphique de la fonction qui associe le volume de glace au volume d'eau liquide, sur l'intervalle $[0 ; 11,5]$ est un segment porté par une droite qui passe par le point $O(0 ; 0)$. Elle correspond à la représentation graphique d'une fonction linéaire, ce qui caractérise une relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

Le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4) Calcul du pourcentage d'augmentation du volume d'eau lorsqu'il gèle

Méthode 1 :

On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace.

Pour 10 litres d'eau liquide, l'augmentation de volume en gelant est : 0,8 litre. L'augmentation de volume est proportionnelle au volume initial donc pour 100 litres d'eau liquide, l'augmentation de volume en gelant sera : 8 litres, soit **8 % d'augmentation** (on a utilisé implicitement ici la propriété suivante : si b est proportionnel à a , alors $b - a$ est proportionnel à a ; b désigne ici le volume de glace, et a le volume d'eau liquide.)

Méthode 2 :

Le pourcentage d'augmentation est $\frac{10,8-10}{10} = \frac{0,8}{10} = 8 \%$, ce qui correspond à un coefficient multiplicatif de 1,08.

Méthode 3 :

Le coefficient de proportionnalité entre le volume d'eau liquide et le volume de glace est $\frac{10,8}{10} = 1,08 = 1 + 0,08$, ce qui traduit **une augmentation de 8 % du volume** au cours du changement d'état.

5) Volume de glace correspondant au volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage

Remarque :

On admet que dire que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace permet d'affirmer que 10,8 litres de glace donnent 10 litres d'eau en fondant.

Quantité d'eau liquide, en mètre cube, fournie en 30 jours par la ville de Lyon : $20 \text{ m}^3 \times 30 = 600 \text{ m}^3$.

Quantité d'eau liquide, en litre, fournie en 30 jours par la ville de Lyon : l'utilisation des relations $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$ et $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ permet de déterminer la quantité d'eau, en litre, fournie en 30 jours par la ville de Lyon. En effet, $600 \text{ m}^3 = 600\,000 \text{ dm}^3 = 600\,000 \text{ L}$.

En utilisant le coefficient multiplicatif précédent, cette quantité d'eau liquide correspond à :

$600\,000 \text{ L} \times 1,08 = \mathbf{648\,000 \text{ L de glace.}}$

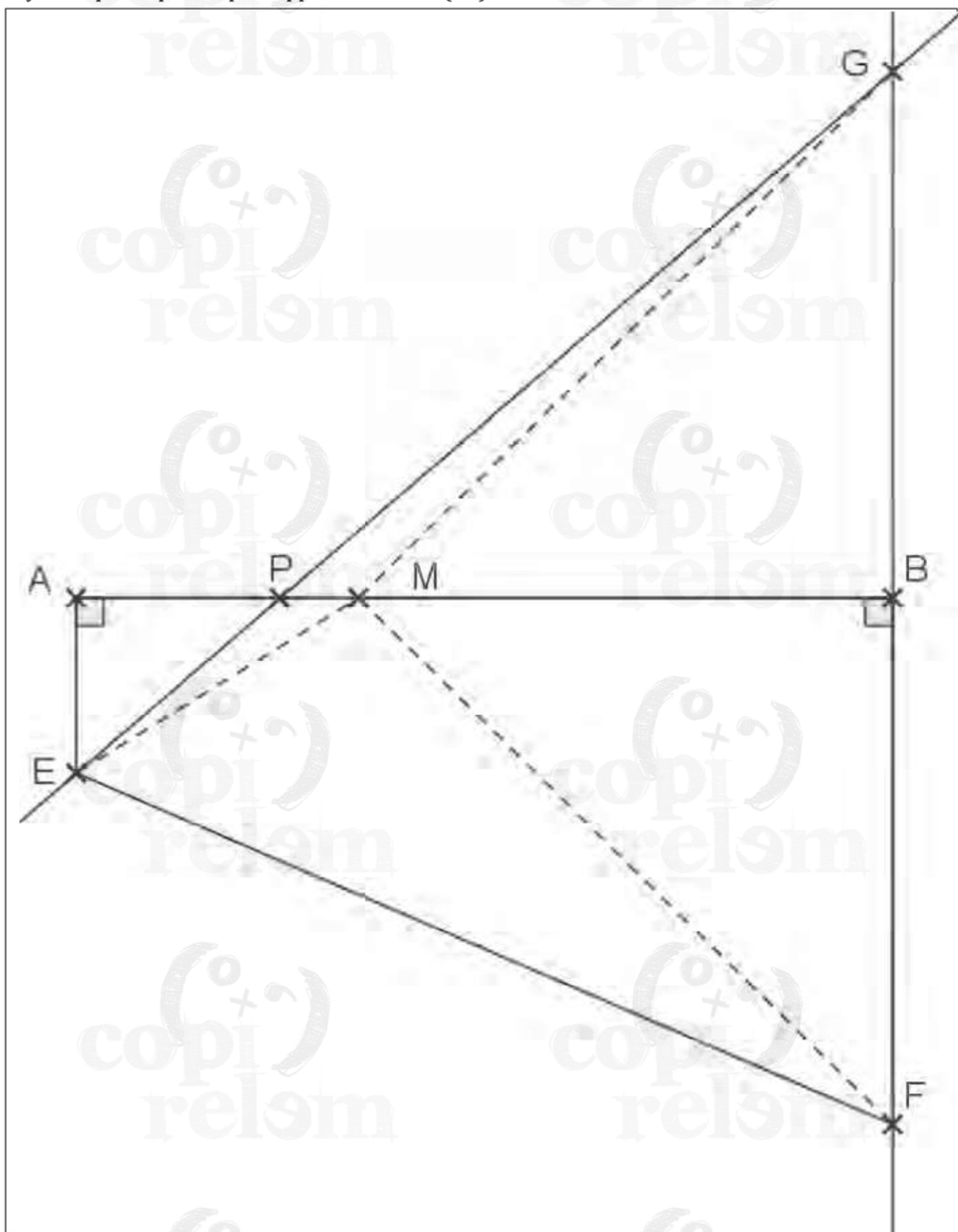
Autre méthode :

$600\,000 \text{ L} = 60\,000 \times 10 \text{ L}$; or 10 L d'eau liquide donnent 10,8 L de glace, donc 600 000 L donnent $60\,000 \times 10,8 \text{ L de glace}$ soit **648 000 L de glace.**

Remarque préliminaire :

En cohérence avec l'énoncé, la notation AB désigne dans ce corrigé la mesure en cm de la longueur du segment AB .

1) Construction du trapèze rectangle $ABFE$ respectant les contraintes de l'énoncé et du point G , symétrique du point F par rapport à la droite (AB) .



2) $EM + MG \geq EP + PG$

On appelle P le point d'intersection des droites (AB) et (EG).

Pour tout point M, $EM + MG \geq EG$ (il s'agit de l'inégalité triangulaire) et, en admettant que P est un point du segment [EG], $EG = EP + PG$.

Donc pour tout point M, $EM + MG \geq EP + PG$

Valeur minimale de $EM + MF$

G est le symétrique du point F par rapport à la droite (AB) donc (AB) est la médiatrice du segment [GF].

M, point de [AB], est donc équidistant de G et F : $MF = MG$.

Donc $EM + MF = EM + MG$ et $EM + MG \geq EP + PG$ (d'après le résultat précédent), on en déduit :

$EM + MF \geq EP + PG$

Cette inégalité traduit le fait que **la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P** (point de [AB]).

3) a) Preuve de l'égalité $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$

Méthode 1 : en utilisant le théorème de Thalès

Les points A, P et B sont alignés ainsi que les points E, P et G. Les droites (AE) et (BG) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AB)).

D'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BG}$.

- Comme P est un point du segment [AB], $BP = BA - AP$ avec $BA = 14$ donc $BP = 14 - AP$.
- $AE = 3$
- Comme G est le symétrique de F par rapport à (AB) et comme (FB) perpendiculaire à (AB), B est le milieu de [FG] et $BG = BF = 9$.

On obtient : $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$.

Méthode 2 : en considérant des angles

- Montrons que l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{BGP}$.
P est un point de (AB) et G est le symétrique de F par rapport à (AB).
Le triangle BPG est donc le symétrique du triangle BPF par rapport à la droite (AB).
La symétrie axiale conserve les angles donc l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{BGP}$.
- Montrons que l'angle $\widehat{BGP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$:
(AE) et (GF) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (AB) ; (GE) est sécante à ces deux droites parallèles donc l'angle $\widehat{BGP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$ (angles alternes-internes).

Ainsi l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$.

Or, dans le triangle BFP rectangle en B, $\tan \widehat{BFP} = \frac{BP}{BF}$,

et dans le triangle AEP rectangle en A, $\tan \widehat{AEP} = \frac{AP}{AE}$.

Les angles $\widehat{BFP}$ et $\widehat{AEP}$ étant égaux, $\frac{AP}{AE} = \frac{BP}{BF}$, soit encore $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BF}$.

Comme P est un point du segment [AB], $BP = BA - AP$ avec $BA = 14$ donc $BP = 14 - AP$.

Ainsi, $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$.

3) b) Calcul de AP

$$\begin{aligned} \frac{AP}{14-AP} &= \frac{3}{9} \\ 9AP &= 3 \times (14 - AP) \\ 9AP &= 42 - 3AP \\ 12AP &= 42 \\ AP &= \frac{7}{2} \\ AP &= 3,5 \end{aligned}$$

4) Valeur minimale de EM + MF.

La valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.

Méthode 1 : calcul de EP + PF.

Dans le triangle PAE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$EP^2 = AP^2 + AE^2 = 3,5^2 + 3^2 = 12,25 + 9 = 21,25$$

Dans le triangle PBF rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$PF^2 = BP^2 + BF^2 \quad \text{avec } BP = AB - AP = 14 - 3,5 = 10,5$$

$$PF^2 = (10,5)^2 + 9^2 = 110,25 + 81 = 191,25$$

$$EP + PF = \sqrt{21,25} + \sqrt{191,25} \quad (= 0,5\sqrt{85} + 1,5\sqrt{85} = 2\sqrt{85})$$

La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{21,25} + \sqrt{191,25}$ ou $2\sqrt{85}$ (il n'y a pas nécessité mathématique de simplifier l'écriture : c'est davantage un usage).

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4

Méthode 2 : EP + PF = EG : calcul de EG.

Soit H le point de (GF) tel que EHG soit un triangle rectangle en H (ou H projeté orthogonal de E sur (GF)).

Dans le triangle EHG rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = HE^2 + HG^2$$

avec

HE = AB car AEHB est un rectangle (quadrilatère dont trois des angles sont des angles droits)

HG = HB + BG car B est un point de [GH]

et BH = AE car AEHB est un rectangle.

$$EG^2 = 14^2 + (3 + 9)^2 = EG^2 = 14^2 + 12^2 = EG^2 = 196 + 144 = EG^2 = 340$$

$$EG = \sqrt{340} \quad (= 2\sqrt{85})$$

La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{340}$ ($= 2\sqrt{85}$).

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4.